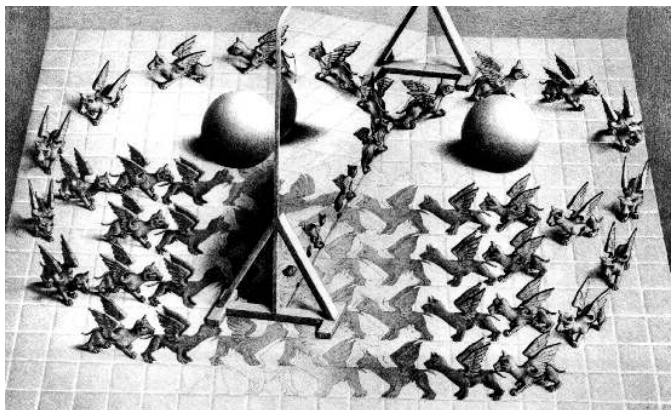


Оптико-механическая аналогия

Условие

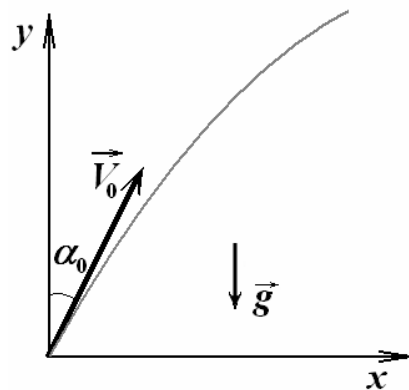


Задание 1. Оптико-механическая аналогия.

Оптико-механическая аналогия - это сходство траектории движения частицы в потенциальном силовом поле с траекторией лучей в оптически неоднородной среде. Траектория материальной точки и траектория светового луча совпадают при определенном соответствии потенциальной энергии и переменного в пространстве показателя преломления среды. Этот факт был теоретически открыт выдающимся ирландским математи-

ком и физиком У. Р. Гамильтоном в 1834 году и уже в нашем столетии оказал влияние на установление связи между волновой оптикой и волновой (квантовой) механикой.

В данном задании вам предстоит рассмотреть два примера аналогия между оптикой и механикой.



1. Движение тела в поле тяжести.

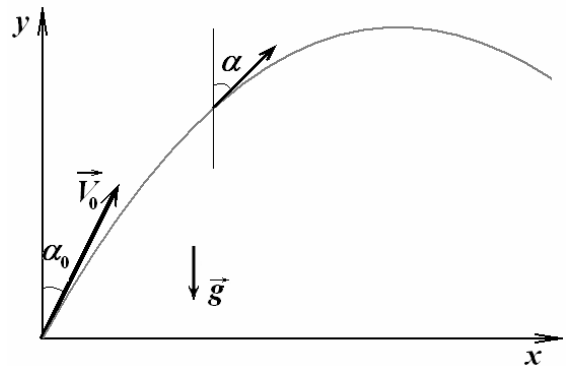
Тело брошено с начальной скоростью v_0 под углом α_0 к вертикали вдоль горизонтальной поверхности. Сопротивлением воздуха пренебрегаем.

1.1 Запишите закон движения тела, т.е. зависимость его координат времени $x(t)$, $y(t)$. Используйте систему координат, показанную на рисунке.

1.2 Запишите уравнение траектории движения тела $y(x)$.

1.3 Определите дальность полета тела и максимальную высоту его подъема.

1.4 Покажите, что в любой точке траектории движения тела угол α , который образует касательная с вертикалью, удовлетворяет условию



$$f(y) \sin \alpha = f_0 \sin \alpha_0 \quad (1)$$

где $f(y)$ - некоторая функция вертикальной координаты y . Найдите эту функцию.

1.5 Предложите алгоритм построения траектории по произвольной известной зависимости угла $\alpha(y)$ от вертикальной координаты y .

2. Луч света в слоисто-неоднородной среде.



Показатель преломления прозрачного бруска больших размеров плавно изменяется с высотой по закону

$$n = n_0 \sqrt{1 - \gamma y} \quad (2)$$

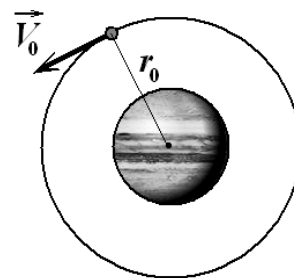
где n_0, γ - известные постоянные величины. Луч света попадает на грань бруска в точке A и после преломления на ней образует угол α с осью Oy . Система координат показана на рисунке.

2.1 На какую максимальную глубину проникнет луч света в брусок?

2.2 На каком расстоянии от точки входа луч выйдет из бруска?

3. Круговая орбита.**</u>

Спутник движется с постоянной по модулю скоростью v_0 по круговой орбите радиуса r_0 вокруг планеты радиус, которой равен R . Ускорение свободного падения на поверхности планеты равно g .



3.1 Определите радиус орбиты спутника.

3.2 По неизвестной причине в некоторый момент времени направление вектора скорости спутника изменилось на небольшой угол, при этом модуль скорости не изменился. При этом, очевидно, орбита стала эллиптической. Найдите зависимость модуля скорости спутника от его расстояния до центра планеты $v(r)$.

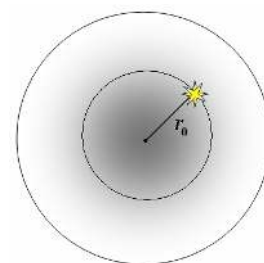
Подсказка. Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух точечных тел определяется по формуле

$$U = -G \frac{Mm}{r},$$

где M , m - массы тел, r - расстояние между телами, G - гравитационная постоянная.

3.3 Найдите изменение модуля скорости спутника Δv при малом изменении его расстояния до центра планеты Δr . 3.4 Покажите, что когда спутник находится на расстоянии r_0 от центра планеты, выполняется соотношение

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = -\frac{v}{r}. \quad (3)$$

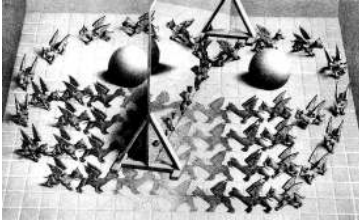


4. Луч света в осесимметричной неоднородной среде.** Цилиндр изготовлен из прозрачного материала, но показатель преломления материала, из которого он изготовлен, медленно уменьшается с увеличением расстояния до его оси по закону

$$n(r) = n_0(1 - \gamma r), \quad (4)$$

где n_0 , γ - известные постоянные величины. На каком расстоянии от оси цилиндра надо произвести вспышку света, чтобы некоторые из световых лучей могли распространяться по окружности вокруг с центром на оси цилиндра?

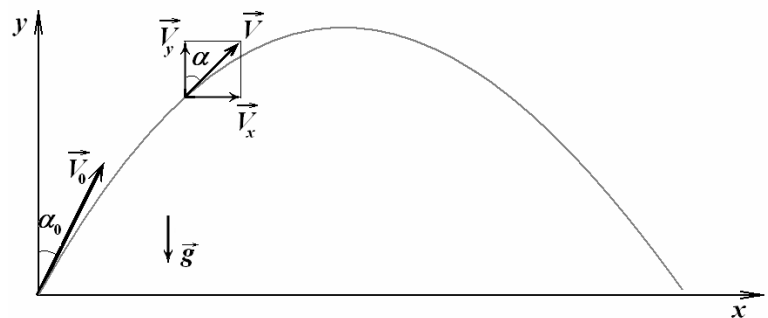
Задание 1. Оптико-механическая аналогия.



1. Движение тела в поле тяжести.

1.1 Решение данной части задачи хорошо известно. Так как ускорение направлено вдоль оси Oy , то закон равноускоренного движения имеет вид

$$\begin{cases} x = v_0 t \sin \alpha_0 \\ y = v_0 t \cos \alpha_0 - \frac{gt^2}{2} \end{cases} \quad (1)$$



1.2 Уравнение траектории получим, исключив из закона движения время t :

$$t = \frac{x}{v_0 \sin \alpha_0} \Rightarrow y = v_0 \cos \alpha_0 \frac{x}{v_0 \sin \alpha_0} - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_0 \sin \alpha_0} \right)^2.$$

После упрощения получим функцию

$$y = x \operatorname{ctg} \alpha_0 - \frac{g}{2v_0^2 \sin^2 \alpha_0} x^2, \quad (2)$$

описывающую параболическую траекторию движения.

1.3 Выражения для дальности полета и максимальной высоты подъема также хорошо известны:

$$S = \frac{2v_0^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{g}; \quad h_{\max} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha_0}{2g}. \quad (3)$$

1.4 Можно заметить, что произведение модуля скорости на синус угла α является проекцией скорости на горизонтальную ось Ox : $v \sin \alpha = v_x$, которая остается неизменной в процессе движения, так как нет внешних сил, изменяющих эту проекцию скорости.

Таким образом, искомой функцией $f(y)$ может служить модуль скорости тела, который может быть найден из закона сохранения энергии

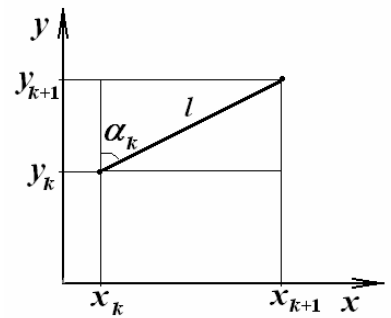
$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gy} = v_0 \sqrt{1 - \frac{2g}{v_0^2}y}. \quad (4)$$

Таким образом, уравнение (1), приведенное в условии задачи, может быть записано в виде

$$\sqrt{1 - \frac{2g}{v_0^2}y} \sin \alpha = \sin \alpha_0 \quad (5)$$

1.5 Основная идея заключается в разбиении траектории на малые участки, предпочтительнее постоянной длины l . Допустим, мы нашли точку траектории с координатами (x_k, y_k) . По известной зависимости угла координаты y , можно рассчитать угол, под которым будет направлен следующий малый участок траектории $\alpha_k = \alpha(y_k)$. Координаты конца очередного отрезка рассчитываются по формулам

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + l \sin \alpha_k \\ y_{k+1} = y_k + l \cos \alpha_k \end{cases} \quad (6)$$



При заданных начальных координатах эта процедура позволяет однозначно построить всю траекторию движения. Таким образом, зависимость $\alpha(y)$ однозначно определяет траекторию движения.

Примечание. Можно показать, что задание функции* $\alpha(y)$ позволяет записать дифференциальное уравнение, имеющее однозначное решение.

2. Луч света в слоисто-неоднородной среде.

Запишем закон преломления света в слоисто неоднородной среде

$$n(y) \sin \alpha = n_0 \sin \alpha_0,$$

И подставим выражение для зависимости показателя преломления от координаты y

$$n_0 \sqrt{1 - \gamma y} \sin \alpha = n_0 \sin \alpha_0. \quad (7)$$

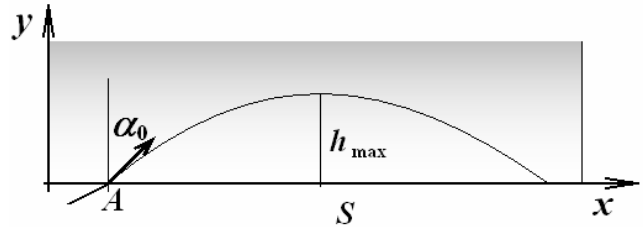
Это уравнение полностью совпадает с уравнением (5), определяющим траекторию движения тела, брошенного под углом к горизонту.

Заметим, что в механике аналогом показателя преломления служит модуль скорости тела – неожиданный результат: там, где в оптике скорость луча возрастает, в механике должна убывать!

Для полного соответствия между уравнениями (5) и (7) следует положить

$$\gamma = \frac{2g}{v_0^2}. \quad (8)$$

Следовательно, траектория луча, описываемая уравнением (7), также является параболой, с параметрами, определяемыми формулами (3). Поэтому для решения данной части задачи достаточно переписать формулы (4) с соответствующей заменой (8)



$$\begin{aligned} S &= \frac{2v_0^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{g} \Rightarrow S = \frac{4 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{\gamma} \\ h_{\max} &= \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha_0}{2g} \Rightarrow h_{\max} = \frac{\cos^2 \alpha_0}{\gamma} \end{aligned} \quad (9)$$

Примечание. Максимальную глубину проникновения света в брусок, можно найти из условия полного внутреннего отражения. На максимальной глубине проникновения* $\sin \alpha = 1$, поэтому*

$$n_0 \sqrt{1 - \gamma y} \sin \alpha = n_0 \sin \alpha_0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{1 - \gamma h_{\max}} = \sin \alpha_0 \Rightarrow h_{\max} = \frac{1 - \sin^2 \alpha_0}{\gamma} = \frac{\cos^2 \alpha_0}{\gamma}.$$

Найти подобным образом расстояние, на котором луч выйдет из бруска затруднительно.

3. Круговая орбита.

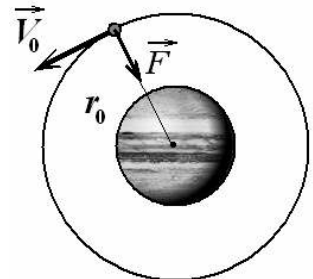
3.1 При движении по круговой орбите выполняется соотношение, следующее из второго закона Ньютона и закона всемирного тяготения:

$$\frac{mv_0^2}{r_0} = G \frac{Mm}{r_0^2}. \quad (10)$$

Массу планеты можно выразить из формулы для ускорения свободного падения на поверхности планеты

$$g = G \frac{M}{R^2}. \quad (11)$$

Из этих выражений определяем соотношение между скоростью спутника и радиусом его круговой орбиты



$$v_0^2 = \frac{gR^2}{r_0}. \quad (12)$$

Откуда радиус орбиты

$$r_0 = \frac{gR^2}{v_0^2}. \quad (13)$$

3.2 Зависимость скорости спутника от его расстояния до центра можно выразить из закона сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} - G\frac{mM}{r_0} = \frac{mv^2}{2} - G\frac{mM}{r_0}. \quad (14)$$

С учетом соотношений (11) и (12), формула для скорости приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{v_0^2}{2} - \frac{gR^2}{r_0} = \frac{v^2}{2} - \frac{gR^2}{r_0} \quad \Rightarrow \quad -\frac{v_0^2}{2} = \frac{v^2}{2} - \frac{gR^2}{r_0} \quad \Rightarrow \\ v = v_0 \sqrt{\frac{2gR^2}{v_0^2 r} - 1} \end{aligned} \quad (15)$$

3.3 Искомое соотношение проще вычислить, с помощью производной

$$\Delta v = v'_r \Delta r = \frac{v_0}{2\sqrt{\frac{2gR^2}{v_0^2 r} - 1}} \left(-\frac{2gR^2}{v_0^2 r^2} \right) \Delta r = -\frac{v_0}{\sqrt{\frac{2gR^2}{v_0^2 r} - 1}} \left(\frac{gR^2}{v_0^2 r^2} \right) \Delta r. \quad (16)$$

3.4 Полагая $r = r_0 = \frac{gR^2}{v_0^2}$, получим, что $\frac{gR^2}{v_0^2 r} = 1$. В этом случае из формулы (16) следует

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = -\frac{v_0}{r_0}, \quad (17)$$

что и требовалось доказать.

4. Луч света в осесимметричной неоднородной среде.

Проводя аналогию между оптикой и механикой (показатель преломления аналогичен скорости тела!), можно утверждать, что условием возможности существования кругового луча является условие

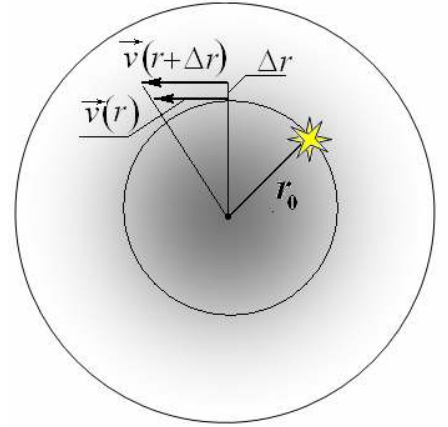
$$\frac{\Delta n}{\Delta r} = -\frac{n(r)}{r}. \quad (18)$$

Используя заданную зависимость показателя преломления от радиуса $n(r) = n_0(1 - \gamma r)$, найдем

$$\frac{\Delta n}{\Delta r} = -n_0\gamma.$$

Теперь из условия (18) определяем искомый радиус кругового луча

$$-n_0\gamma = -\frac{n_0(1 - \gamma r)}{r} \Rightarrow r = \frac{1}{2\gamma}. \quad (19)$$



Примечание. Основное условия существования кругового луча (18) может быть получено и без использования оптико-механической аналогии. Фронт этого луча должен поворачиваться так, чтобы оставаться направленным радиально. Это возможно в том случае, если выполняется условие

$$\frac{v(r + \Delta r)}{r + \Delta r} = \frac{v(r)}{r}, \quad \text{или} \quad \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{v(r)}{r}.$$

Учитывая, что в «оптике» $v = \frac{c}{n}$ (из которого следует $\frac{\Delta v}{\Delta r} = -\frac{c}{n^2} \frac{\Delta n}{\Delta r}$), получим

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{v(r)}{r} \Rightarrow -\frac{c}{n^2} \frac{\Delta n}{\Delta r} = \frac{c}{nr} \Rightarrow \frac{\Delta n}{\Delta r} = -\frac{n}{r}.$$