

Условие

Задание 2. «У природы нет плохой погоды»

Достоверные прогнозы погоды до сих пор остаются проблемой для синоптиков – слишком уж много факторов на нее может повлиять. Но мы с вами не будем пытаться предсказать погоду на завтра – в этой задаче вам предстоит исследовать наиболее характерные закономерности климата планеты.

2.1. «Средняя температура»

Рассмотрим некую планету (условимся называть её Землёй), радиусом $R_З = 6370$ км, вращающуюся по круговой орбите радиусом $L = 150$ млн. км вокруг звезды (условно Солнца) радиусом $R_С = 696$ тыс. км и температурой поверхности $T_С = 5800$ К.

Определите поток излучения Солнца (солнечную постоянную) Φ_0 (т.е. энергию, проходящую за единицу времени через площадку единичной площади, перпендикулярную световым лучам) вблизи поверхности Земли.

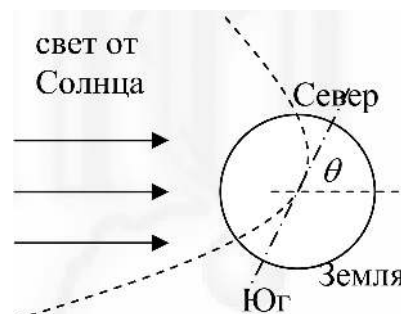
Земля представляет собой твердый шар с очень большой теплопроводностью. Определите среднюю температуру Земли $T_З$.

И Солнце, и Землю считайте абсолютно черными телами.

По закону Стефана-Больцмана, энергия, излучаемая с единицы площади абсолютно черного тела за единицу времени равна σT^4 , где постоянная Стефана-Больцмана $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/м² К⁴.

2.2. «Весна, лето, осень, зима и снова весна»

На Земле наблюдается смена времен года. Для объяснения этого явления рассмотрим другую модель Земли: будем считать (как это есть на самом деле), что земной шар не успевает ни прогреваться, ни промерзать из-за низкой теплопроводности. Поэтому его теплоемкость определяется только тем слоем, температура которого успевает измениться при смене времен года. Для оценки теплоемкости считайте, что вода прогревается однородно до глубины $h = 5,00$ м, а более глубокие слои не греются. Ось вращения Земли наклонена к плоскости её орбиты под углом $\theta = 66,5^\circ$. Воображаемая линия «экватор» делит Землю на северное и южное полушарие. Переносом тепла через экватор можно пренебречь.



Среднесуточная мощность солнечного излучения, падающая на северное полушарие зависит от времени года (если отсчет вести от самого длинного дня), приблизительно как $P = 2\pi R_З^2(A + B \cos \Omega t)$, где $2\pi R_З^2$ – площадь северного полушария.

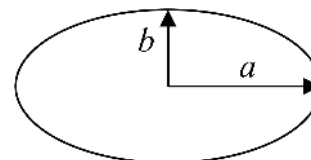
2.2.1 Определите постоянную Ω . Оцените постоянные A и B .

2.2.2 Найдите зависимость среднесуточной температуры T северного полушария от времени года t .

2.2.4 Найдите задержку во времени τ между самым длинным и самым теплым днем года. Плотность воды равна $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, удельная теплоемкость $c = 4200 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$. Считайте, что вода полностью поглощает все излучение, падающее на неё. Период движения Земли вокруг Солнца равен $t_3 = 365,25$ суток.

Примечания. 1) Площадь круга равна πR^2 . Площадь поверхности сферы равна $4\pi R^2$.

2) Если смотреть на круг сбоку, то он виден как эллипс. 3) Площадь эллипса равна πab , где a и b – большая и малая полуоси эллипса. 4) Справедливы следующие тождества



$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

5) При $|\xi| < 0,1$ справедливо выражение $(1 + \xi)^n \approx 1 + n\xi$. 6) $2 + 2 \approx 4$.

2.3. «Парниковый эффект»

Согласно формуле Планка, интенсивность излучения абсолютно черного тела, приходящаяся на интервал длин волн от $\lambda - \Delta\lambda/2$ до $\lambda + \Delta\lambda/2$ равна

$$\Delta I = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1} \Delta\lambda,$$

где e – экспонента ($e \approx 2,7183$), $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ – скорость света в вакууме, $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$ – постоянная Планка, $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$ – постоянная Больцмана, T – температура абсолютно черного тела.

В данном пункте вернемся к модели Земли, как шара с очень большой теплопроводностью. Кроме того, у Земли есть газовая атмосфера, полностью поглощающая излучение с длиной волны от $\lambda_{\min} = 8,0 \text{ мкм}$ до $\lambda_{\max} = 12,0 \text{ мкм}$. Считайте, что теплообмен между поверхностью Земли и ее атмосферой осуществляется только посредством излучения. Температуру атмосферы считайте постоянной, не зависящей от ее высоты.

Из-за того, что температуры Солнца и Земли различны, их спектры излучения лежат в разных диапазонах длин волн, и атмосфера поглощает излучение Солнца и Земли по-разному.

2.3.1 Оцените суммарный коэффициент поглощения атмосферой излучения Солнца A_0 и излучения Земли A_1 .

2.3.2 Определите среднюю температуру земной поверхности T_3 в рамках данного приближения.

2.4. «Ядерная зима или почему вымерли динозавры»

В результате извержения крупного вулкана атмосфера Земли наполнилась дымом (мелкими частицами пыли и сажи) и стала частично непрозрачна для любого излучения (степень зачернённости атмосферы $\eta = 0,6$), помимо полного поглощения излучения с длинами волн от $\lambda_{\min} = 8,0$ мкм до $\lambda_{\max} = 12,0$ мкм.

2.4.1 Определите среднюю температуру земной поверхности в этом случае.

Решение

Задание 2. «У природы нет плохой погоды»

2.1. «Средняя температура» Единица площади Солнца, как абсолютно черного тела, по закону Стефана-Больцмана излучает мощность σT_C^4 . Со всей поверхности Солнца излучается мощность

$$P_C = 4\pi R_C^2 \sigma T_C^4, \quad (1)$$

причем при распространении в пустом пространстве эта мощность остается постоянной

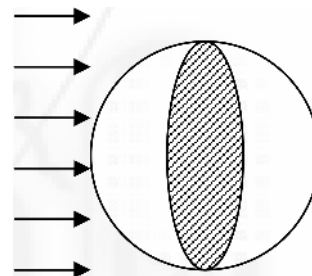
$$\Phi_0 4\pi L^2 = P_C = \text{const}. \quad (2)$$

Поток солнечного излучения на земной орбите (и вблизи поверхности Земли) равен

$$\Phi_0 = \sigma T_C^4 \left(\frac{R_C}{L} \right)^2, \quad (3)$$

$$\Phi_0 = 1380 \text{ Вт/м}^2. \quad (4)$$

Глядя из центра Солнца, земной шар виден, как круг радиусом R_Z . На Землю попадает излучение Солнца в пределах этого круга. Падающая



на Землю мощность равна

$$P_{\text{пад}} = \pi R_3^2 \Phi_0. \quad (5)$$

Земля, как абсолютно черное тело (по условию) излучает в окружающее пространство мощность

$$P_{\text{изл}} = 4\pi R_3^2 \sigma T_3^4. \quad (6)$$

Условие баланса энергии

$$P_{\text{пад}} = P_{\text{изл}}. \quad (7)$$

$$T_3 = T_C \sqrt{\frac{R_C}{2L}}, \quad (8)$$

$$T_3 = 279 \text{ К}. \quad (9)$$

2. «Весна, лето, осень, зима и снова весна»

Мощность солнечного излучения, падающего на северное полушарие, равна произведению потока излучения Φ_0 на площадь проекции северного полушария (так, как оно видно с Солнца)

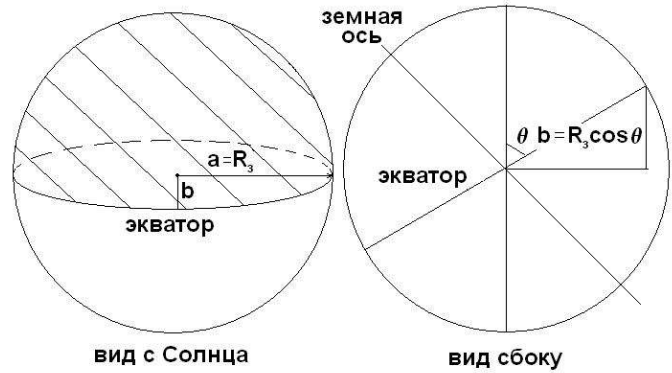
$$P = \Phi_0 S_{\text{пр}}. \quad (10)$$

Из-за того, что ось Земли наклонена к плоскости земной орбиты под углом $\theta = 66,5^\circ$, экватор в проекции виден как дуга эллипса. Только в дни осеннего и весеннего равноденствия экватор виден в проекции, как отрезок прямой. Площадь проекции северного полушария изменяется по достаточно сложному закону, но в данной задаче использовано приближение $S_{\text{пр}} = S_0 + S_1 \cos \Omega t$. Очевидно, что угловая частота Ω совпадает с угловой скоростью движения Земли вокруг Солнца

$$\Omega = \frac{2\pi}{t_3} = 1,72 \cdot 10^{-2} \text{ суток}^{-1} = 1,99 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}. \quad (11)$$

Для оценки постоянных A и B можно воспользоваться значением площади проекции северного полушария в самый длинный день

$$S_{\text{max}} = \frac{\pi R_3^2 + \pi R_3^2 \cos \theta}{2} = \frac{\pi R_3^2}{2} (1 + \cos \theta) \quad (12)$$



и площади проекции в самый короткий день

$$S_{\min} = \frac{\pi R_3^2 - \pi R_3^2 \cos \theta}{2} = \frac{\pi R_3^2}{2}(1 - \cos \theta) \quad (13)$$

Принцип отыскания площади проекции северного полушария понятен из рисунка и не требует специальных комментариев. Максимальная мощность, падающая на северное полушарие, равна

$$P_{\max} = \Phi_0 \frac{\pi R_3^2}{2}(1 + \cos \theta) = 2\pi R_3^2(A + B) \quad (14)$$

а минимальная

$$P_{\min} = \Phi_0 \frac{\pi R_3^2}{2}(1 - \cos \theta) = 2\pi R_3^2(A - B) \quad (15)$$

Отсюда постоянные A и B равны

$$A = \Phi_0/4 = 345 \text{ Вт/м}^2 \quad (16)$$

$$B = (\Phi_0 \cos \theta)/4 = 138 \text{ Вт/м}^2 \quad (17)$$

Солнечная энергия, падающая на северное полушарие от Солнца, идет на нагрев воды, покрывающей земной шар и на компенсацию потерь энергии, излучаемой Землей в космическое пространство. Энергетический баланс за время dt

$$2\pi R_3^2 h \rho c \cdot dT + 2\pi R_3^2 \sigma T^4 dt = 2\pi R_3^2 (A + B \cos \Omega t) dt \quad (18)$$

$$h \rho c \frac{dT}{dt} + \sigma T^4 = (A + B \cos \Omega t) \quad (19)$$

Полученное уравнение – нелинейное неоднородное дифференциальное уравнение. В общем случае решать его достаточно сложно. Но в данной задаче логично предположить, что температура будет изменяться по закону

$$T(t) = T_0 + T_1 \cos(\Omega t - \varphi) \quad (20)$$

причем

$$T_1 < T_0 \quad (21)$$

Решение стоит искать в таком виде потому, что раз вынуждающая сила (правая часть уравнения (19)) гармонически изменяется во времени, то и решение будет изменяться гармонически. В данной задаче рассматривается модель климата Земли, поэтому амплитуда колебаний

температуры T_1 намного меньше средней температуры T_0 . Отличная от нуля теплоемкость земной поверхности вызывает отставание колебаний температуры по фазе от колебаний падающего потока энергии, что и выражается слагаемым $-\varphi$ под косинусом. Итак, необходимо найти постоянные T_0, T_1, φ . Для этого подставим предполагаемое решение (20) в уравнение (19):

$$-h\rho c\Omega T_1 \sin(\Omega t - \varphi) + \sigma(T_0 + T_1 \cos(\Omega t - \varphi))^4 = (A + B \cos \Omega t) \quad (22)$$

Поскольку $T_1 \ll T_0$ (правда, это надо проверить после того, как мы найдем T_0 и T_1) можно воспользоваться формулой приближенных вычислений $(1 + \xi)^n \approx 1 + n\xi$:

$$(T_0 + T_1 \cos(\Omega t - \varphi))^4 = T_0^4(1 + T_1/T_0 \cos(\Omega t - \varphi))^4 \approx T_0^4(1 + 4T_1/T_0 \cos(\Omega t - \varphi)) \quad (23)$$

и ещё раскроем $\sin(\Omega t - \varphi)$ и $\cos(\Omega t - \varphi)$

$$\sin(\Omega t - \varphi) = \sin \Omega t \cos \varphi - \cos \Omega t \sin \varphi \quad (24)$$

$$\cos(\Omega t - \varphi) = \cos \Omega t \cos \varphi + \sin \Omega t \sin \varphi \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & -h\rho c\Omega T_1 \sin \Omega t \cos \varphi + h\rho c\Omega T_1 \cos \Omega t \sin \varphi + \sigma T_0^4 + \\ & + 4\sigma T_0^3 T_1 \cos \Omega t \cos \varphi + 4\sigma T_0^3 T_1 \sin \Omega t \sin \varphi = A + B \cos \Omega t \end{aligned} \quad (26)$$

Синус и косинус изменяются независимо друг от друга во времени. Чтобы равенство (26) выполнялось в любой момент времени, необходимо, чтобы

$$\sigma T_0^4 - A = 0, \quad (27)$$

$$h\rho c\Omega T_1 \sin \varphi + 4\sigma T_0^3 T_1 \cos \varphi = B, \quad (28)$$

$$-h\rho c\Omega T_1 \cos \varphi + 4\sigma T_0^3 T_1 \sin \varphi = 0. \quad (29)$$

Итак, получилась система из трех уравнений с тремя неизвестными. Из (28) находим постоянную T_0

$$T_0 = \sqrt[4]{A/\sigma} = 279\text{K}. \quad (30)$$

Из (29) находим фазу φ

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{h\rho c\Omega}{4\sigma T_0^3}, \quad (31)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{h\rho c\Omega}{4\sigma T_0^3} \right) = 40,3^\circ, \quad (32)$$

что соответствует задержке по времени на

$$\tau = \frac{40,3^\circ}{360^\circ} 365,25 \text{ суток} \approx 41 \text{ сутки} \quad (33)$$

Это значит, что самый теплый день наступает на 41 день позже самого длинного. Именно поэтому июль теплее, чем июнь, несмотря на то, что больше всего солнечной энергии поступает на северное полушарие именно в июне.

Для определения постоянной T_1 можно подставить φ в уравнение (28), а можно возвести (28) и (29) в квадрат и сложить, тогда получим:

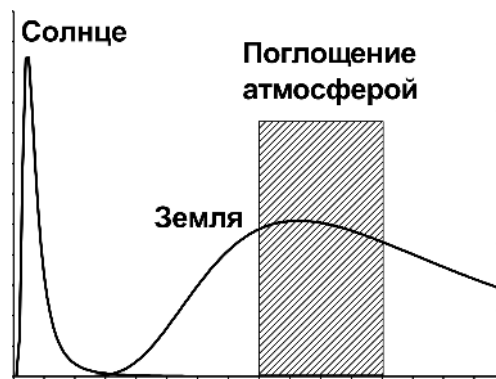
$$T_1 = \frac{B}{\sqrt{(h\rho c\Omega)^2 + (4\sigma T_0^3)^2}} = 21,4\text{K}. \quad (34)$$

Как видно, $T_1/T_0 \approx 0,077$, поэтому исходное предположение (21) верно и можно пользоваться формулой приближенных вычислений (23).

3. «Парниковый эффект»

Солнце и Земля излучают, как абсолютно черное тело. Но температура поверхности Солнца $T_C = 5800\text{K}$, а температура поверхности Земли (см. п. 1) $T_3 = 279\text{K}$, поэтому максимум спектра излучения Солнца и Земли приходится на разные длины волн: для Солнца - 500нм, а для Земли - 10,4мкм.

Поскольку атмосфера Земли поглощает излучение с длинами волн от 8,0мкм до 12,0мкм, то излучение поверхности Земли будет поглощаться атмосферой гораздо сильнее, чем излучение Солнца. Это значит, что атмосфера будет служить для Земли «шубой», затрудняя отвод тепла во внешнее пространство, и температура поверхности Земли с атмосферой будет больше, чем в случае Земли без атмосферы.



На графике представлены спектры излучения Солнца и Земли, причем в разных масштабах, что понятно – ведь вся излучаемая интенсивность (а это площадь под графиком) по закону Стефана-Больцмана

$$I = \sigma T^4, \quad (35)$$

и у Солнца приблизительно в $2 \cdot 10^5$ раз больше, чем у Земли.

Интегральную интенсивность излучения Солнца и Земли находим

по формуле (35) (см. таблицу 1).

Интенсивность, приходящуюся на интервал длин волн, поглощаемых атмосферой, находим по приближенной формуле, приведенной в условии. Значение функции берем в середине интервала длин волн $\lambda_0 = 10,0$ мкм.

$$I_{\text{погл}} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda_0^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda_0}} - 1} (\lambda_{\text{max}} - \lambda_{\text{min}}). \quad (36)$$

В таблице 1 представлены значения полной интенсивности, излучаемой Землей и Солнцем, значения поглощаемой интенсивности (по приближенной формуле и точно посчитанные при помощи ЭВМ) и коэффициент поглощения $A = I_{\text{погл}}/I$. Как видно, приближенные значения $I_{\text{погл}}$ незначительно отличаются от точных.

	Земля	Солнце
I , Вт/м ²	344	$1,01 \cdot 10^8$
$I_{\text{погл}}$ (прибл.), Вт/м ²	86,1	$6,04 \cdot 10^4$
$I_{\text{погл}}$ (точно), Вт/м ²	83,1	$6,87 \cdot 10^4$
A	0,250	$6,8 \cdot 10^{-4}$

Доля поглощаемого излучения Солнца A_0 мала, поэтому можно говорить, что атмосфера вовсе не поглощает солнечное излучение $A_0 \approx 0$ (37). Для Земли же поглощение составляет $A_1 = 0,250$ (38).

Для нахождения температуры земной поверхности необходимо рассмотреть баланс падающей и излучаемой энергии, схематически показанный на рисунке.

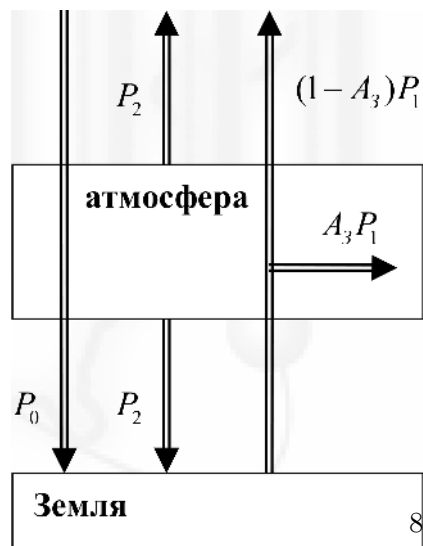
На земную поверхность падает солнечное излучение мощностью

$$P_0 = \sigma T_C^4 \left(\frac{R_C}{L} \right)^2 \pi R_3^2, \quad (39)$$

которое не поглощается в атмосфере.

Сама атмосфера излучает мощность P_2 в космос и такую же мощность на земную поверхность.

Земля излучает мощность



$$P_1 = \sigma T_3^4 4\pi R_3^2, \quad (40)$$

причем часть A_1 от этой мощности поглощается в атмосфере, а оставшаяся часть $(1 - A_1)$ уходит в космос.

Условие энергетического баланса (когда не происходит нагрева поверхности и атмосферы Земли):

$$P_0 + P_2 = P_1 \quad (\text{для поверхности}), \quad (41)$$

$$2P_2 = A_1 P_1 \quad (\text{для атмосферы}). \quad (42)$$

Отсюда с учетом формул (40) и (42)

$$P_1 = \frac{P_0}{1 - A_1/2}, \quad (43)$$

$$\sigma T_3^4 4\pi R_3^2 = \frac{\sigma T_C^4 \left(\frac{R_C}{L}\right)^2 \pi R_3^2}{1 - A_1/2}, \quad (44)$$

$$T_3 = T_C \sqrt{\frac{R_C}{2L}} \sqrt[4]{\frac{1}{1 - A_1/2}} = 289K. \quad (45)$$

$$\sqrt{\frac{R_C}{2L}} \sqrt[4]{\frac{1}{1 - A_1/2}}$$

Это и есть так называемый «парниковый эффект» - земная атмосфера пропускает солнечные лучи, но задерживает излучение Земли, поэтому средняя температура планеты оказывается больше, чем температура планеты без атмосферы.

Замечание. Несомненно, для определения коэффициента поглощения надо находить излучаемую Землей интенсивность и поглощаемую атмосферой интенсивность, соответствующую истинной температуре Земли, т.е. не 279К, а 289К. Однако коэффициент поглощения в данном температурном интервале слабо зависит от температуры, поэтому для оценки можно пользоваться его значением для температуры поверхности Земли $T_3 = 279K$.

4. «Ядерная зима»

Опять рассмотрим баланс энергии. Если степень зачернённости атмосферы равна η , то в атмосфере поглотится солнечная мощность ηP_0 , а поверхности Земли достигнет только мощность $(1-\eta)P_0$. Излучение же Земли будет поглощаться полностью в интервале длин волн от 8,0 мкм до 12,0 мкм, а в других длинах волн интенсивность будет уменьшаться из-за зачернённости атмосферы. Это значит, что от излучаемой Землей мощности P_1 атмосфера будет поглощать мощность

$$P_1(A_1 + \eta(1 - A_1)) . \quad (48)$$

Условие энергетического баланса:

$$(1 - \eta)P_0 + P_2 = P_1 \quad (\text{для поверхности}), \quad (46)$$

$$2P_2 = \eta P_0 + (A_1 + \eta(1 - A_1))P_1 \quad (\text{для атмосферы}). \quad (47)$$

Решение системы (48), (49) приводит к результату

$$P_1 = P_0 \frac{1 - \eta/2}{1 - (A_1 + \eta(1 - A_1))/2}, \quad (48)$$

$$T_3 = T_C \sqrt{\frac{R_C}{2L}} \sqrt[4]{\frac{1 - \eta/2}{1 - (A_1 + \eta(1 - A_1))/2}} \approx 285K . \quad (49)$$

Для Земли парниковый эффект играет очень большую роль – не будь в атмосфере парниковых газов, средняя температура на планете была бы гораздо ниже. При совершенно задымленной атмосфере температура поверхности планеты опустится до 279К. Как видно, в случае задымленной атмосферы температура поверхности оказывается меньше. В связи с этим данный эффект получил название «ядерная зима», хотя, причиной его не обязательно может стать взрыв ядерного оружия. Годится извержение вулкана или падение крупного метеорита – лишь бы атмосфера стала пропускать меньше солнечного излучения.

