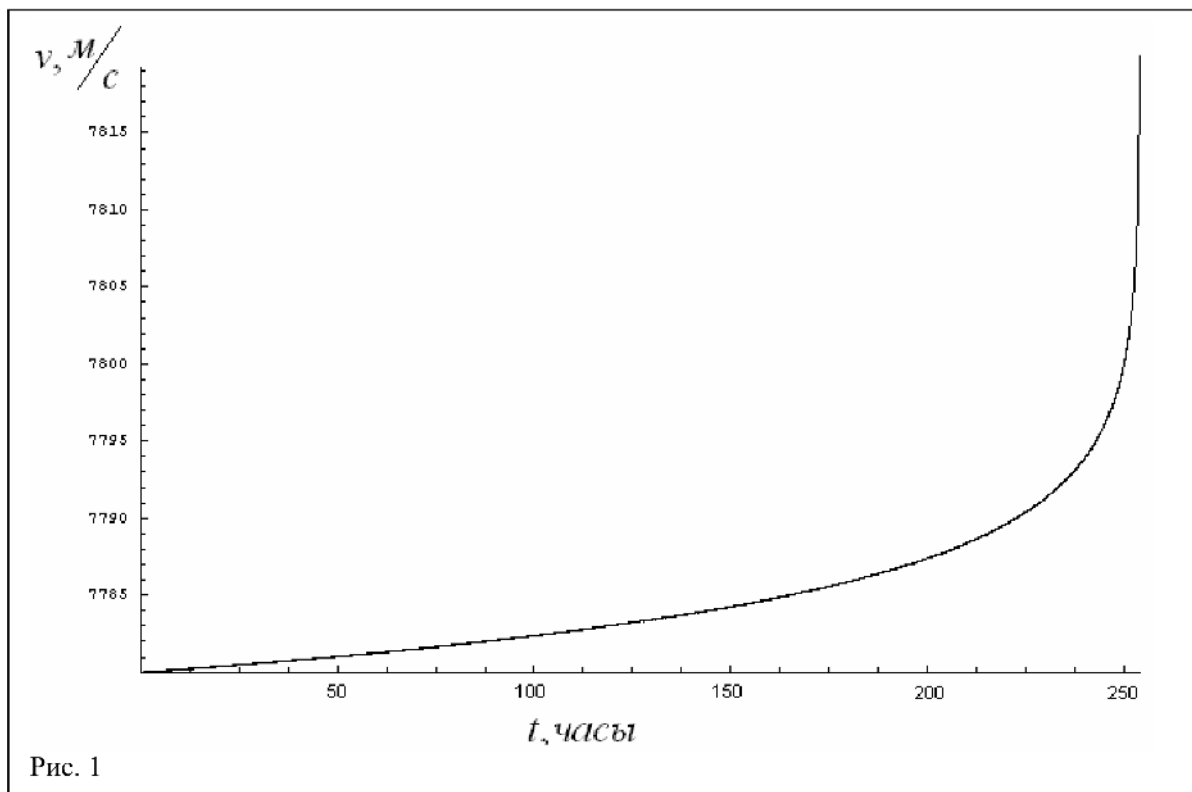


## Условие

### Задание 2 «Торможение спутника»



Рассмотрим движение искусственного спутника Земли в верхних слоях атмосферы. Наличие атмосферного «хвоста» приводит к тому, что на спутник действует тормозящая сила, пропорциональная плотности газа, площади поперечного сечения спутника и квадрату его скорости:

$$F_C = C \cdot \rho \cdot S \cdot v^2.$$

Безразмерный коэффициент  $C$  в данной задаче можно принять равным единице.

Сила эта невелика, и спутник может годами вращаться вокруг Земли. Однако радиус его орбиты будет постепенно уменьшаться, соответственно будет изменяться и скорость движения спутника. Предлагаем рассмотреть динамику спутника подробнее:

1. Спутник с массой  $m$  и площадью поперечного сечения  $S$  находится на орбите радиуса  $R_0$ . Определите скорость его движения  $v_0$  и период обращения вокруг Земли  $T_0$ .
2. Чему равна полная механическая энергия спутника  $E_0$ ?
3. Теперь учтём силу сопротивления. Плотность атмосферы на данной высоте —  $\rho_0$ . За один «виток» радиус орбиты изменяется на относительно маленькую величину  $\Delta R$  ( $\Delta R \ll R_0$ ), поэтому силу сопротивления на этом «витке» можно считать постоянной величиной. Определите относительное изменение скорости спутника  $\frac{\Delta v}{v_0}$  и радиуса орбиты  $\frac{\Delta R}{R_0}$  за один оборот.
4. Определите тангенциальное  $a_\tau$  (по касательной к

орбите) ускорение спутника на этой орбите. 5. С какой скоростью  $v_{n0}$  спутник приближается к центру Земли на этой высоте? Если бы плотность атмосферы изменялась по закону  $\rho = AR^\alpha$ , то при некотором значении  $\alpha$ , эта скорость оставалась бы постоянной величиной. Определите, чему равен этот показатель  $\alpha$ .

6. Рассмотренное явление может дать ценную информацию о верхних слоях атмосферы. Сферический зонд с массой  $m = 100$  кг и площадью поперечного сечения  $S = 1,00$  м<sup>2</sup> выводят на орбиту на высоте  $h = 208$  км. Не составляет большого труда измерять изменение скорости спутника. На рисунке 1 приведён график зависимости скорости спутника от времени наблюдения.

Известно, что плотность атмосферы экспоненциально уменьшается с высотой, т.е.  $\rho \sim e^{-\beta h}$ . Используя приведенный график, определите постоянную  $\beta$ .

Некоторые постоянные:

Радиус Земли  $R_З = 6,40 \cdot 10^6$  м.

Масса Земли  $M = 6,00 \cdot 10^{24}$  кг.

## Решение

### Задание 2 «Торможение спутника»

1. При движении спутника, на него действует лишь сила притяжения со стороны Земли (сопротивление пока не учитываем). Она же является центростремительной силой.

$$G \frac{Mm}{R_0^2} = \frac{mv_0^2}{R_0} \quad (1)$$

Отсюда получаем:

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R_0}} \quad (2)$$

Период обращения:

$$T_0 = \frac{2\pi R_0}{v_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} R_0^{3/2} \quad (3)$$

2. Полная механическая энергия спутника есть сумма его потенциальной и кинетической энергий:

$$E_0 = -G \frac{Mm}{R_0} + \frac{mv_0^2}{2} = -G \frac{Mm}{2R_0} = -\frac{mv_0^2}{2} \quad (4)$$

Заметим, что полная энергия является отрицательной величиной и по модулю равна кинетической энергии.

3. Т.к. радиус орбиты изменяется несущественно, то можно считать, что на протяжении всего витка на него действует одна и та же постоянная по модулю сила сопротивления  $F_C = C\rho_0 S v_0^2$ , т.е. плотность воздуха и скорость в этом выражении считаем постоянными. Эта сила будет совершать отрицательную работу  $A_C = -F_C \cdot 2\pi R_0$ , что приведёт к уменьшению полной энергии спутника. Для вычисления относительного изменения скорости, воспользуемся выражением полной энергии спутника через его скорость. Тогда закон сохранения энергии примет вид:

$$-\frac{mv_0^2}{2} - C\rho_0 S v_0^2 \cdot 2\pi R_0 = -\frac{m(v_0 + \Delta v)^2}{2} \quad (5)$$

Сразу же отметим, что скорость должна увеличиваться. Преобразуем выражения, стоящие в правой части равенства.

$$(v_0 + \Delta v)^2 = v_0^2 \left(1 + \frac{\Delta v}{v_0}\right)^2 = v_0^2 \left(1 + 2\frac{\Delta v}{v_0} + \left(\frac{\Delta v}{v_0}\right)^2\right) \approx v_0^2 \left(1 + 2\frac{\Delta v}{v_0}\right) \quad (6)$$

В последнем преобразовании было учтено, что величина  $\left(\frac{\Delta v}{v_0}\right)^2$  очень маленькая, поэтому её можно не учитывать. Используя такое упрощение и преобразуя уравнение (5), получим:

$$\frac{\Delta v}{v_0} = 2\pi R_0 \frac{C\rho_0 S}{m} \quad (7)$$

Для определения относительного изменения радиуса орбиты, поступим следующим образом. Из (2) следует, что:

$$v_0^2 R_0 = GM = const \quad (8)$$

Другими словами, произведения квадрата скорости на радиус орбиты остаётся постоянной величиной. Значит:

$$(v_0 + \Delta v)^2 \cdot (R_0 - \Delta R) = v_0^2 R_0 \quad (9)$$

Совершив, преобразование (6), получим:

$$\frac{\Delta R}{R_0} = 2\frac{\Delta v}{v_0} = 4\pi R_0 \frac{C\rho_0 S}{m} \quad (10)$$

Заметим, что в решении этого пункта присутствует существенное упрощение. С одной стороны мы считаем силу постоянной, а, т.к. в выражение для силы входит квадрат скорости, то его мы фактически тоже считаем постоянным. С другой стороны мы ищем изменение этой самой скорости. На самом деле, с изменением скорости изменяется и сила сопротивления, и точное решение будет несколько отличаться от полученного нами. Однако для малых относительных изменений скорости это различие будет несущественным и такой метод решения вполне применим.

4. Выражение для тангенциального ускорения легко получить, разделив изменение скорости спутника на величину промежутка времени, за который это изменение произошло, т.е. на продолжительность одного «витка».

$$a_T = \Delta v / (2\pi R_0 / v_0) = \frac{C\rho_0 S v_0^2}{m} = \frac{F_C}{m} \quad (11)$$

Такой вот получается парадокс. Вроде как сила сопротивления, а приводит к ускорению спутника.

5. Скорость снижения спутника находится аналогично:

$$v_{n0} = \Delta R / (2\pi R_0 / v_0) = \frac{2R_0 C\rho_0 S v_0}{m} \quad (12)$$

Используя выражение (2), получим:

$$v_{n0} = \frac{2C\rho_0 S \sqrt{GM}}{m} \sqrt{R_0} \quad (13)$$

Если плотность будет убывать обратно пропорционально корню квадратному от расстояния до центра Земли, то скорость  $v_{n0}$  не будет изменяться. Поэтому

$$\alpha = -\frac{1}{2} \quad (14)$$

6. Рассмотрим подробнее выражение (11). Выражая плотность, получим:

$$\rho = \frac{m}{CS} \frac{1}{v^2} a_T = \frac{m}{CS} \frac{1}{v^2} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (15)$$

Таким образом, чтобы найти плотность, надо не знать скорость и ускорение спутника. Кроме того, понадобится также определять высоту, на которой находится спутник в данный момент времени:

$$h = R - R_0 = \frac{GM}{v^2} - R_0 \quad (16)$$

Подставим известные численные значения постоянных и получим:

$$\rho = 100 \frac{1}{v^2} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (17)$$

$$h = \frac{4,00 \cdot 10^{14}}{v^2} - 6,4 \cdot 10^6 \quad (18)$$

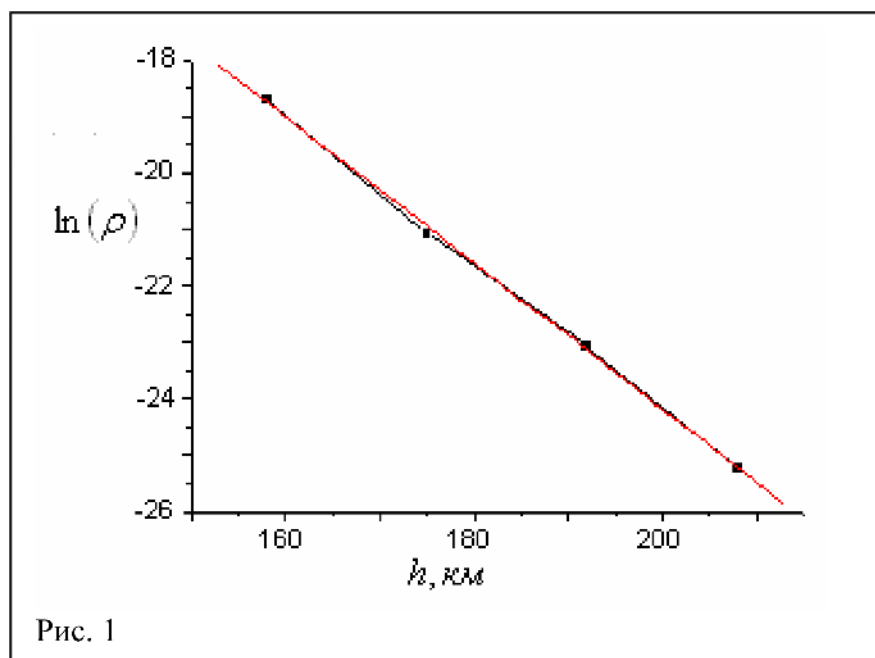
Для вычисления  $\rho(h)$  необходимо на приведённом графике взять несколько точек, по значению скорости вычислить высоту полёта спутника, а проведя касательные в этих точках,

вычислить ускорения, что позволит определить плотность атмосферы. Результаты приведены в таблице 1.

Таблица 1.

| $v, \frac{м}{с}$ | $h, км$ | $\frac{\Delta v}{\Delta t}, \frac{м}{с^2}$ | $\rho, \frac{кг}{м^3}$ | $\ln(\rho)$ |
|------------------|---------|--------------------------------------------|------------------------|-------------|
| 7780             | 208     | $6,6 \cdot 10^{-6}$                        | $1,1 \cdot 10^{-11}$   | -25         |
| 7790             | 192     | $5,6 \cdot 10^{-5}$                        | $9,5 \cdot 10^{-11}$   | -23         |
| 7800             | 175     | $4,3 \cdot 10^{-4}$                        | $7,0 \cdot 10^{-10}$   | -21         |
| 7810             | 158     | $4 \cdot 10^{-3}$                          | $7 \cdot 10^{-9}$      | -19         |

Точно провести касательную – сложная задача, поэтому ускорение приведено с двумя (а в последнем случае – с одной) значащими цифрами. Видим, что в пятидесятикилометровом интервале высоты плотность изменяется почти на три порядка. В таблице также вычислен натуральный логарифм от плотности, что необходимо для определения  $\beta$ . На рисунке 1 приведён график  $\ln(\rho) = f(h)$ . Можно с достаточной долей уверенности сказать, что плотность действительно будет убывать по экспоненциальному закону.



Из этого графика можно получить величину постоянной  $\beta$ :

$$\beta = (1,3 \pm 0,2) \cdot 10^{-1} \text{ км}^{-1} = (1,3 \pm 0,2) \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}. \quad (19)$$