

9 класс

Задание 1. «Разминка»

Задача 9.1.1

1.1.1 На свечу, погруженную в воду, действуют сила тяжести F_T и сила Архимеда F_A .

Чтобы свеча вообще плавала, должно выполняться условие плавания: архимедова сила должна быть равна силе тяжести

$$F_A = F_T. \quad (1)$$

Для устойчивого плавания свечи необходимо, чтобы при отклонениях от вертикального положения возникал момент сил, возвращающий свечу в первоначальное положение. Это условие будет выполнено, если точка приложения силы тяжести (центр масс свечи) будет лежать ниже точки приложения выталкивающей силы Архимеда совпадающей с центром масс вытесненной жидкости – центром плавания (рис. 1а), в противном случае вертикальное положение будет неустойчиво (рис. 1б).

В случае однородной свечи центр тяжести всегда будет находиться выше центра плавания,

поэтому свеча не может устойчиво плавать в вертикальном положении. Именно для этого к нижнему основанию свечи прикрепляется алюминиевая шайба.

Если длина свечи больше нескольких диаметров, то можно пренебречь изменением положения точки приложения силы Архимеда при ее наклоне.

Обозначим глубину погружения свечи с алюминиевой шайбой под воду d (рис. 2). Тогда условие (1) записывается, как

$$\rho gsl + \rho_1 gsh = \rho_0 gsd \quad (2)$$

откуда следует

$$d = \frac{\rho l + \rho_1 h}{\rho_0}. \quad (3)$$

Свеча будет плавать, если глубина её погружения не превышает сумму высот свечи и шайбы, то есть при $d \leq l + h$. С учетом соотношения (3) это условие принимает вид

$$\frac{\rho l + \rho_1 h}{\rho_0} \leq l + h. \quad (4)$$

Теперь определим, при какой высоте свеча сможет плавать устойчиво в вертикальном положении. Выберем ось координат Oy , с началом отсчета по нижнему краю алюминиевой шайбы.

Тогда координата центра плавания будет равна

$$y_A = \frac{d}{2} = \frac{1}{2} \frac{\rho l + \rho_1 h}{\rho_0}, \quad (6)$$

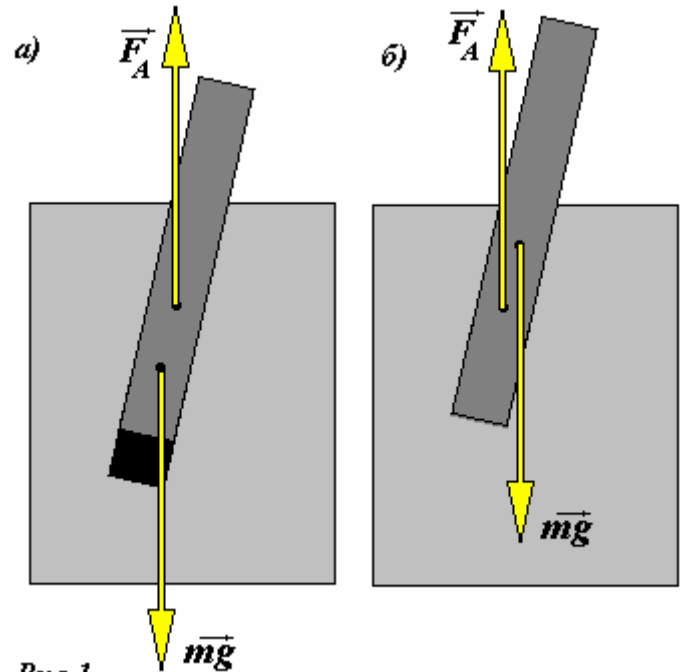


Рис.1

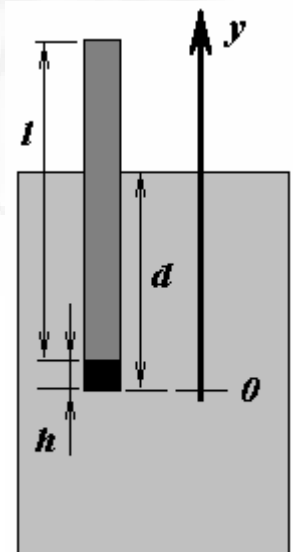


Рис. 2

а координата центра тяжести

$$y_c = \frac{\rho_1 h \frac{h}{2} + \rho l \left(h + \frac{l}{2} \right)}{\rho_1 h + \rho l} \quad (7)$$

Таким образом, условие устойчивости $y_A \geq y_c$ формулируется в виде неравенства

$$\frac{1}{2} \frac{\rho l + \rho_1 h}{\rho_0} \geq \frac{\rho_1 h \frac{h}{2} + \rho l \left(h + \frac{l}{2} \right)}{\rho_1 h + \rho l}. \quad (8)$$

Совместное решение неравенств (4) и (8), первое из которых линейное, а второе – квадратное, и дает нам интервал длин, при которых свеча устойчиво будет плавать в воде

$$8,5 \text{ см} \leq l \leq 18,5 \text{ см}. \quad (9)$$

1.1.2 Свеча погаснет, когда её длина станет равной минимально возможной для плавания, т.е. $l_{\min} = 8,5 \text{ см}$. Значит, гореть она будет в течение времени

$$t = \frac{l - l_{\min}}{u} = 15 \text{ мин}. \quad (10)$$

Отметим, что все время горения свеча будет плавать устойчиво.

Дополнения.

1. Проиллюстрируем графически решение данной задачи. На рис. 3 построены графики зависимостей полной длины свечи вместе с шайбой ($l + h$); глубины погружения d , рассчитанной по формуле (3); координаты центра плавания (6) и координаты центра масс (7) от длины парафиновой части свечи l (деления шкал даны в сантиметрах). Заливкой выделены области, в которых выполняются условие плавания и условие устойчивости.

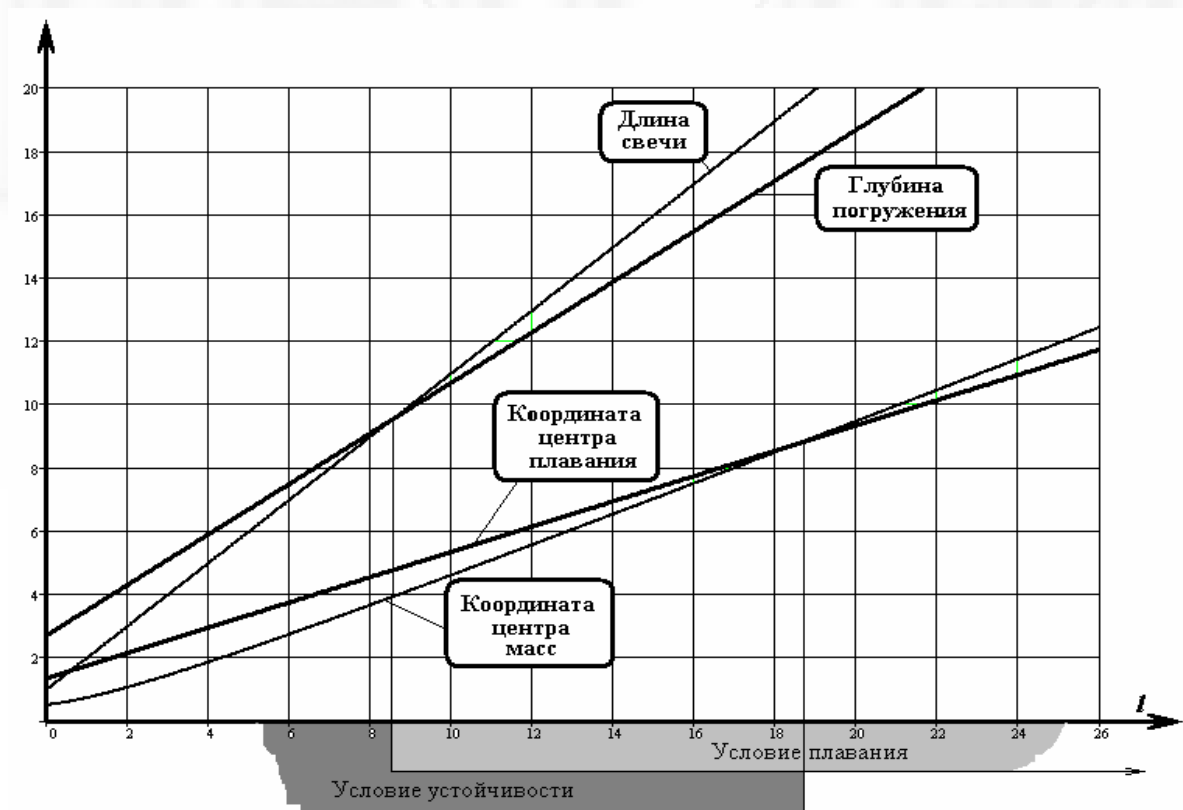


Рис.3

2. Приведем более подробные выкладки, необходимые для решения системы неравенств. Для упрощения работы с громоздкими выражениями в дальнейшем введем безразмерные переменные $\eta = \rho/\rho_0$, $\eta_1 = \rho_1/\rho_0$, $\xi = l/h$. Используя данные условия $\eta = 0,8$; $\eta_1 = 2,7$.

В новых переменных глубина погружения

$$d = (\eta\xi + \eta_1)h, \quad (\partial 1)$$

а условие плавания (4) превращается в

$$\eta\xi + \eta_1 \leq \xi + 1. \quad (\partial 2).$$

Решаем это неравенство: $\xi(1-\eta) \geq \eta_1 - 1$ и поскольку $1-\eta = 0,2 > 0$, то

$$\xi \geq \frac{\eta_1 - 1}{(1-\eta)}. \quad (\partial 3)$$

Минимальная высота свечи, при которой она ещё сможет плавать, равна

$$l_{\min} = \xi_{\min} h = \frac{\eta_1 - 1}{(1-\eta)} h, \quad (\partial 4)$$

или $l_{\min} = \frac{2,7-1}{1-0,2} \cdot 1,0 \text{ см} = 8,5 \text{ см}.$

В безразмерных переменных координата центра выталкивания равна

$$y_A = \frac{d}{2} = \frac{(\eta\xi + \eta_1)h}{2}, \quad (\partial 5)$$

а координата центра тяжести

$$y_C = \frac{\rho_1 h \frac{h}{2} + \rho l (h + \frac{l}{2})}{\rho_1 h + \rho l} = \frac{\frac{1}{2}\eta_1 + \eta\xi + \frac{1}{2}\eta\xi^2}{\eta_1 + \eta\xi} h. \quad (\partial 6)$$

Выполним математические преобразования необходимые для решения неравенства (8) с учетом того, что $\eta_1 + \eta\xi > 0$

$$\frac{(\eta\xi + \eta_1)h}{2} \geq \frac{\frac{1}{2}\eta_1 + \eta\xi + \frac{1}{2}\eta\xi^2}{\eta_1 + \eta\xi} h$$

$$(\eta\xi + \eta_1) \geq \frac{\eta_1 + 2\eta\xi + \eta\xi^2}{\eta_1 + \eta\xi}$$

$$(\eta\xi + \eta_1)^2 \geq \eta_1 + 2\eta\xi + \eta\xi^2$$

$$\eta^2 \xi^2 + \eta_1^2 + 2\eta\eta_1\xi \geq \eta_1 + 2\eta\xi + \eta\xi^2$$

$$\eta(1-\eta)\xi^2 + 2\eta(1-\eta_1)\xi + \eta_1(1-\eta_1) \leq 0$$

Мы получили квадратичное неравенство относительно ξ . Поскольку коэффициент при ξ^2 положительный, решением этого неравенства будет $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$, где $\xi_{1,2}$ - корни квадратного уравнения

$$\eta(1-\eta)\xi^2 + 2\eta(1-\eta_1)\xi + \eta_1(1-\eta_1) = 0.$$

Его дискриминант равен

$$\begin{aligned} D/4 &= (b/2)^2 - ac = \eta^2(1-\eta_1)^2 - \eta(1-\eta)\eta_1(1-\eta_1) = \eta(1-\eta_1)[\eta(1-\eta_1) - \eta_1(1-\eta)] = \\ &= \eta(1-\eta_1)[\eta - \eta\eta_1 - \eta_1 + \eta\eta_1] = \eta(1-\eta_1)(\eta - \eta_1) = \eta(\eta_1 - 1)(\eta_1 - \eta) \end{aligned}$$

При наших данных $D/4 = 0,8(2,7-1)(2,7-0,8) = 2,6 > 0$, следовательно, существует 2 действительных корня этого уравнения:

$$\xi_{1,2} = \frac{-\eta(1-\eta_1) \pm \sqrt{\eta(\eta_1-1)(\eta_1-\eta)}}{\eta(1-\eta)} = \frac{\eta_1-1}{1-\eta} \pm \frac{1}{1-\eta} \sqrt{\frac{(\eta_1-1)(\eta_1-\eta)}{\eta}}.$$

Подстановка численных значений исходных данных приводит к результату $\xi_1 = -1,5; \xi_2 = 18,5$.

Таким образом, условие устойчивого плавания имеет вид:

$$\frac{\eta_1 - 1}{1 - \eta} - \frac{1}{1 - \eta} \sqrt{\frac{(\eta_1 - 1)(\eta_1 - \eta)}{\eta}} \leq \xi \leq \frac{\eta_1 - 1}{1 - \eta} + \frac{1}{1 - \eta} \sqrt{\frac{(\eta_1 - 1)(\eta_1 - \eta)}{\eta}},$$

а с учетом условия плавания (д3))

$$\frac{\eta_1 - 1}{1 - \eta} \leq \xi \leq \frac{\eta_1 - 1}{1 - \eta} + \frac{1}{1 - \eta} \sqrt{\frac{(\eta_1 - 1)(\eta_1 - \eta)}{\eta}}.$$

Итак, для устойчивого плавания должно выполняться $-1,5 \text{ см} \leq l \leq 18,5 \text{ см}$, для плавания вообще $l \geq 8,5 \text{ см}$. Таким образом, свеча будет устойчиво плавать, если длина свечи лежит в интервале $8,5 \text{ см} \leq l \leq 18,5 \text{ см}$.

Задача 9.1.2

После замыкания электрической цепи вследствие выделения тепла Джоуля-Ленца температура t проводника начнет расти. Однако как следует из условия, по мере роста температуры проводника будет увеличиваться и количество теплоты, отдаваемое им в единицу времени в окружающее пространство. Следовательно, при некотором значении t_i мощность P тепловыделения в проводнике сравняется с мощностью $P_{\text{охл}}$ тепловых потерь (охлаждения) через его поверхность, и дальнейший рост температуры в системе прекратится.

Запишем условие динамического равновесия $P_{\text{охл}} = P$ с учетом закона Джоуля-Ленца

$$\frac{U^2}{R} = \alpha(t_i - t_0)S, \quad (1)$$

где t_i — максимальная (установившаяся) температура проводника.

Подставляя в (1) выражения для сопротивления проводника $R = \rho \frac{l}{S} = \rho \frac{l}{\pi r^2}$ и площади его боковой поверхности $S = 2\pi r l$ (теплоотдачей через торцы цилиндра пренебрегаем, т.к. $r \ll l$) получим

$$\frac{U^2}{\rho l} \pi r^2 = \alpha(t_i - t_0)2\pi r l \Rightarrow t_i - t_0 = \{t_0 = 0, 0^\circ \text{C}\} = t_i = \frac{U^2 r}{2\rho \alpha l^2}, \quad (2)$$

где U — напряжение на проводнике. Поскольку объем проводника остается неизменным, то изменение длины проводника приводит к изменению его радиуса. Эта связь следует из выражения для объема

$$V = \pi r^2 l \Rightarrow r = \sqrt{\frac{V}{\pi l}}. \quad (3)$$

Подставляя, это выражение в формулу (2), для температуры проволоки получим

$$t_i = \frac{U^2}{2\rho \alpha l^2} \sqrt{\frac{V}{\pi l}} = \frac{C}{l^{5/2}}. \quad (4)$$

где C - постоянный для данных условий коэффициент. Записав два подобных соотношения для начальной конечной длины проводника и разделив их друг на друга, получим пропорцию

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{l_1^{5/2}}{l_2^{5/2}}. \quad (5)$$

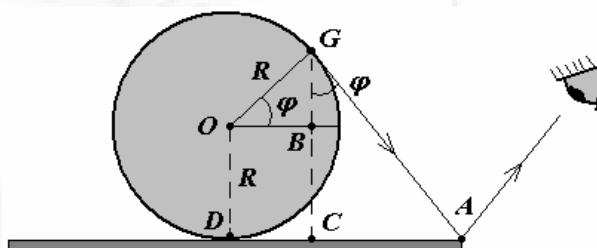
из которой следует ответ задачи $t_2 = t_1 \sqrt{\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^5} \approx 10^\circ\text{C}$.

Уменьшение температуры проводника после растяжения вполне понятно и на качественном уровне: к этому ведет как падение мощности тепловыделения вследствие увеличения сопротивления, так и увеличение площади теплоотдачи (поверхности) проводника.

Отметим, что радиус проводника, заданный в условии задачи, не вошел в конечный результат. Однако малое численное значение этого параметра позволяет считать, что распределение тока внутри проводника является однородным.

Задача 9.1.3

Как следует из рисунка, увидеть в зеркале минимального размера некоторую точку G на глобусе можно только в том случае, если луч, идущий по касательной к шару в этой точке попадет на край зеркала A .



Следует заметить, что в этом случае она будет всего лишь «на горизонте» глобуса, но предположим, что острота зрения смотрящего достаточна для подобного наблюдения.

Искомый минимальный радиус зеркала найдем как

$$R_{\min} = DC + CA = \{(DC = OB)\} = R \cos \varphi + CG \operatorname{tg} \varphi. \quad (1)$$

Поскольку $CG = R + R \sin \varphi$, то окончательно получаем

$$R_{\min} = R \cos \varphi + R(1 + \sin \varphi) \operatorname{tg} \varphi = R(\cos \varphi + (1 + \sin \varphi) \operatorname{tg} \varphi). \quad (2)$$

Расчет по (2) для угла $\varphi = 55^\circ$ дает

$$R_{\min} = 0,63 \text{ м.}$$

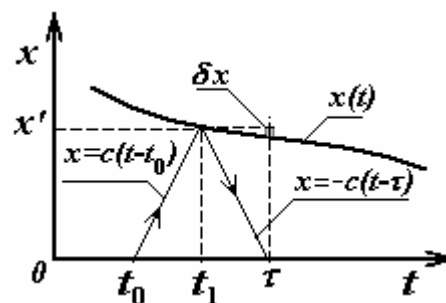
Интересно, что, чисто теоретически из (2) следует, при неограниченном возрастании радиуса зеркала ($R_{\min} \rightarrow \infty$) можно увидеть даже точку северного полюса глобуса ($\varphi = \frac{\pi}{2}$), что в реальности невозможно из-за ограниченной разрешающей способности глаза человека.

Задание 9.2. «Запаздывание»

Сначала рассмотрим общие подходы к решению данной задачи.

Схематически изобразим (рис. 1) закон движения тела $x(t)$. Сигнал, посланный в момент времени t_0 распространяется по закону $x_c = c(t - t_0)$. Когда сигнал достигнет движущегося тела, их координаты будут равны, поэтому момент времени отражения сигнала t_1 , может быть найдено из уравнения

$$x(t_1) = c(t_1 - t_0). \quad (1)$$



Это уравнение позволяет найти момент времени отражения t_1 как функцию времени испускания сигнала t_0 . Отраженный сигнал движется в обратном направлении с той же скоростью, поэтому он вернется в исходную точку в момент времени τ , для которого выполняется соотношение

$$t_1 - t_0 = \tau - t_1. \quad (2)$$

Согласно описанной в условии методике, за положение объекта в момент прихода сигнала принимается его положение в момент отражения сигнала. На рисунке отмечена ошибка определения закона движения δx , связанная с тем, что координата движущегося тела в момент отражения сигнала, приписывается изображению в момент прихода отраженного сигнала.

Итак, в принципе, первый путь решения задачи проясняется: из уравнения (1) находим t_1 как функцию t_0 ; вычисляем координату $x(t_1(t_0))$, затем из уравнения (2) $t_1(t_0) - t_0 = \tau - t_1(t_0)$ выражаем t_0 как функцию τ ; наконец записываем закон движения¹ изображения $x'(\tau) = x(t_1(t_0(\tau)))$.

Однако на этом пути придется решать два уравнения (1) и (2), при этом необходимо находить промежуточную функцию $t_1(t_0)$, которая не нужна в окончательном результате. Поэтому можно элементарно избавиться от этой функции, переписав уравнение (1) с помощью соотношения (2)

$$x(t_1) = c(\tau - t_1). \quad (3)$$

Из этого уравнения можно найти время отражения как функцию времени приема отраженного сигнала $t_1(\tau)$, а закон движения изображения далее можно определить двумя способами

$$x'(\tau) = x(t_1(\tau)), \quad (4)$$

либо

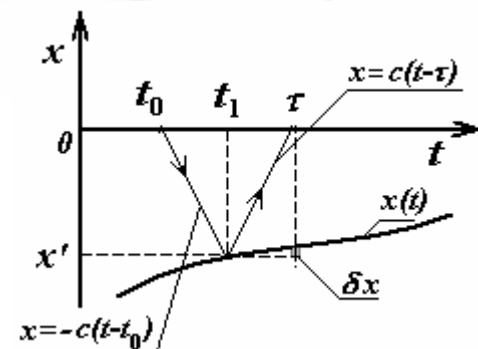
$$x'(\tau) = c(\tau - t_1(\tau)). \quad (5)$$

Этот путь явно короче: решение одного уравнения и одна подстановка.

Теперь еще одно дополнительное осложнение – а если координата объекта отрицательна? Сделаем рисунок для этого варианта (рис. 2) Тогда следует рассматривать сигнал, распространяющийся в отрицательном направлении оси Ox , в этом случае уравнение (1) надо заменить на

$$x(t_1) = -c(t_0 - t_1), \quad (1^*)$$

соответственно изменится и более удобное уравнение



¹ Все кинематические характеристики движения изображений будем «штриховать»

(3)

$$x(t_1) = -c(\tau - t_1). \quad (3^*)$$

Уравнения (3) и (3*) отличаются только знаком правой части, поэтому их можно объединить

$$x(t_1) = \pm c(\tau - t_1) \quad (6)$$

или переписать в виде, который отражает явный физический смысл (расстояние до объекта равно расстоянию, которое проходит сигнал):

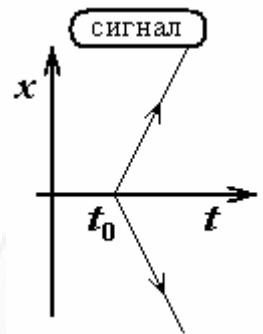
$$|x(t_1)| = c(\tau - t_1). \quad (7)$$

Кстати, при любом движении (не только вдоль оси Oх) – справедливо такое уравнение!

Замечательно, но уравнение (7) или равносильное ему (6) может иметь несколько корней. Конечно, исходя из постановки задачи², следует выбирать только те корни, для которых выполняется условие

$$t_0 < t_1 < \tau. \quad (8)$$

Каждый раз придется анализировать корни – искать их смысл, принимать, или отбрасывать. По-видимому, все же сначала лучше анализировать, а потом искать то, что нужно. Такой анализ можно унифицировать: построить график закон движения и график распространения сигнала (рис.3), а затем рассмотреть точки их пересечения. При этом следует посмотреть, как меняется «картинка» при изменении параметров задачи.



Применим эти общие рассуждения к тем вариантам движения объекта, которые описаны в условии задачи.

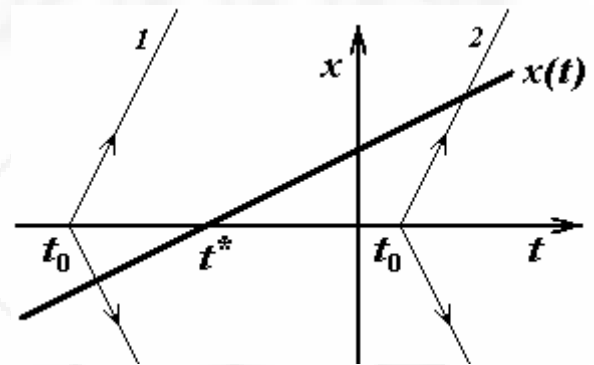
1. Равномерное движение.

Построим график закона движения тела

$$x(t) = x_0 + v_0 t, \quad (1.1)$$

который является прямой линией (рис. 4)

Также изобразим графики движения сигналов, испущенных в различные моменты времени. Легко заметить, что необходимо решать различные уравнения, в зависимости от знака координаты объекта в момент отражения сигнала. Эти два варианта легко различимы. Объект пересекает начало координат³ в момент времени



$$t^* = -\frac{x_0}{v_0}; \quad (1.2)$$

Если сигнал послан в этот момент времени, то отражение и возвращение произойдут мгновенно, то есть при $t_0 = t^* \quad \tau = t_1 = t_0 = t^*$.

Итак, при $\tau = t_1 = t_0 < -\frac{x_0}{v_0}$, для определения закона движения следует решить уравнение

$$x_0 + v_0 t_1 = -c(\tau - t_1), \quad (1.3)$$

² Сигнал распространяется во все стороны пространства, но только «из прошлого в будущее».

³ В реальности, такая ситуация не очень приятна, как для объекта, так и для наблюдателя. Но в рамках нашей модели материальных точек, будем считать, что наши «герои» успешно разойдутся. Более правдоподобная ситуация будет рассмотрена чуть позже.

из которого следует, что $t_1 = \frac{c\tau + x_0}{c - v_0}$, а закон движения имеет вид

$$x'(\tau) = -c(\tau - t_1) = \frac{c}{c - v_0}(x_0 + v_0\tau). \quad (1.4)$$

При $\tau = t_1 = t_0 > -\frac{x_0}{v_0}$ уравнение, для определения времени отражения, имеет вид

$$x_0 + v_0 t_1 = c(\tau - t_1), \quad (1.5)$$

из которого определяем $t_1 = \frac{c\tau - x_0}{c + v_0}$ и закон движения изображения

$$x'(\tau) = c(\tau - t_1) = \frac{c}{c + v_0}(x_0 + v_0\tau). \quad (1.6)$$

Итак, закон движения изображения в рассматриваемом случае имеет вид

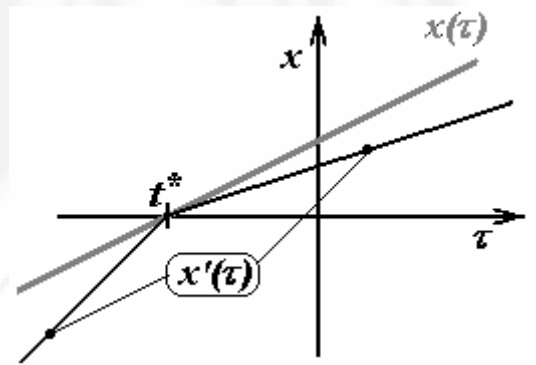
$$x'(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{1-\gamma}(x_0 + v_0\tau), & \text{при } \tau < -\frac{x_0}{v_0} \\ \frac{1}{1+\gamma}(x_0 + v_0\tau), & \text{при } \tau > -\frac{x_0}{v_0} \end{cases}, \quad (1.7)$$

здесь обозначено $\gamma = \frac{v_0}{c}$ (это обозначение мы будем использовать и в дальнейшем).

График этой функции показан на рисунке 5, там же изображен и график движения самого объекта.

Скорость движения изображения изменяется скачком при переходе объекта через начало координат: при приближении объекта его изображение движется быстрее, при удалении наоборот – изображение движется медленнее:

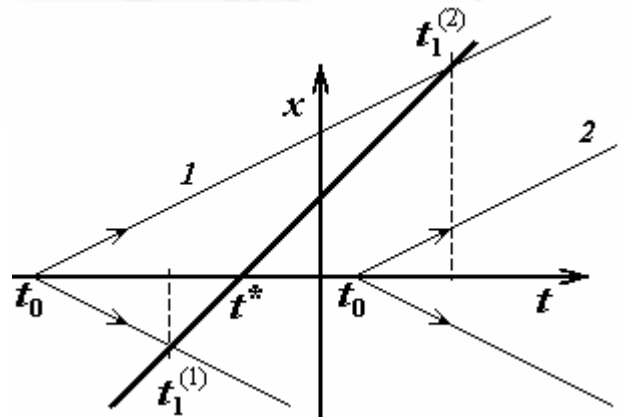
$$v'(\tau) = \begin{cases} \frac{v_0}{1-\gamma}, & \text{при } \tau < -\frac{x_0}{v_0} \\ \frac{v_0}{1+\gamma}, & \text{при } \tau > -\frac{x_0}{v_0} \end{cases}. \quad (1.8)$$



Попытайтесь качественно объяснить этот эффект изменения скорости.

На этом решение данной части задачи не заканчивается – необходимо отдельно рассмотреть движение объекта со скоростью, большей скорости сигнала $v_0 > c$.

Опять построим графики законов движения объекта и сигналов, посланных в различные моменты времени (рис. 6 – на котором ради экономии места масштаб оси времени изменен по сравнению с предыдущими рисунками). В этом случае ситуация кардинально изменяется. Во-первых, сигналы, посланные в моменты времени $t_0 > t^*$ не догонят объект, следовательно, не дадут изображения (оно исчезает!).



Во-вторых, сигналы, посланные при $t_0 < t^*$, отразятся от объекта дважды: один раз при приближении самолета (в момент времени $t_1^{(1)}$) и при его удалении (в момент времени $t_1^{(2)}$). Второе отражение произойдет, когда объект догонит сигнал. Таким образом, при $\tau > t^*$ сонар⁴ будет давать два изображения.

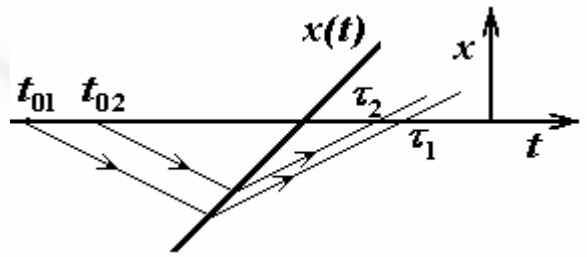
Для расчета закона движения первого изображения следует решить уравнение

$$x_0 + v_0 t_1^{(1)} = -c(\tau - t_1^{(1)}), \quad (1.9)$$

которое совпадает с уравнением (1.3), и поэтому приводит к тому же закону движения (напомним, справедливому только при $\tau > t^*$)

$$x'_{(1)}(\tau) = \frac{c}{c - v_0} (x_0 + v_0 \tau). \quad (1.10)$$

Поразительно, так как $v_0 > c$, скорость изображения отрицательна – изображение движется в сторону противоположную движению объекта. Объяснение этого парадокса дано на рисунке 7. Сигнал, посланный раньше ($t_{01} < t_{02}$), возвратится позже ($\tau_1 > \tau_2$), поэтому быстрее будет поступать информация о более близком положении объекта.



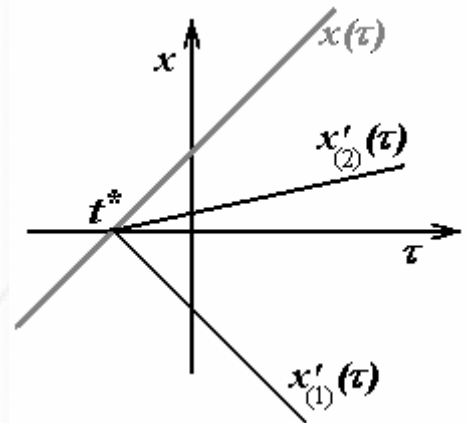
Для описания движения второго изображения необходимо решить уравнение, совпадающее с уравнением (1.5),

$$x_0 + v_0 t_1^{(2)} = c(\tau - t_1^{(2)}), \quad (1.11)$$

что приводит к аналогичному закону движения изображения

$$x'_{(2)}(\tau) = \frac{c}{c + v_0} (x_0 + v_0 \tau). \quad (1.12)$$

Графики этих законов движения построены на рисунке 8.



Скорости движения изображений легко найти из законов движения

$$v'_{(1)} = \frac{v_0}{1 - \gamma}, \quad \text{при } \tau > -\frac{x_0}{v_0} \quad (1.13)$$

$$v'_{(2)} = \frac{v_0}{1 + \gamma}, \quad \text{при } \tau > -\frac{x_0}{v_0}$$

Таким образом, изображения появляются в момент пересечения объектом начала координат, затем одно медленно удаляется в ту же сторону, что и движущийся объект, а второе – движется быстрее в противоположную сторону.

⁴ Не будем обсуждать, можно ли реально зарегистрировать оба отраженных сигнала – в нашем рассмотрении затуханием сигнала пренебрегаем.

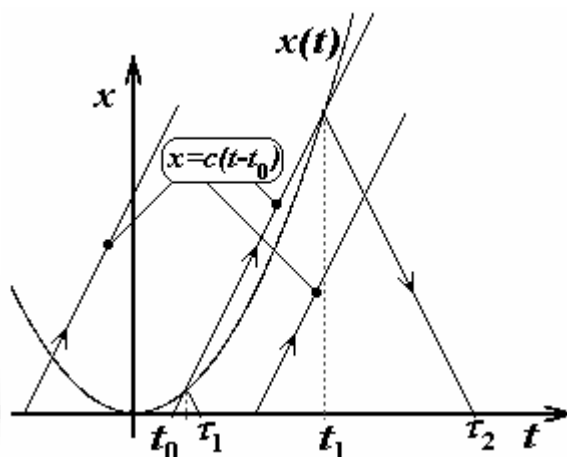
2. Равноускоренное движение.

Если при равномерном движении пришлось рассматривать четыре варианта, то сколько их будет при равноускоренном движении объекта?

При законе движения

$$x(t) = \frac{at^2}{2} \quad (2.1)$$

объект все время находится с одной стороны от наблюдателя ($x \geq 0$), поэтому достаточно рассмотреть только сигнал, распространяющийся в положительном направлении оси Ox . Также обратим внимание, что скорость объекта изменяется и на одних интервалах больше скорости сигнала, а на других меньше.

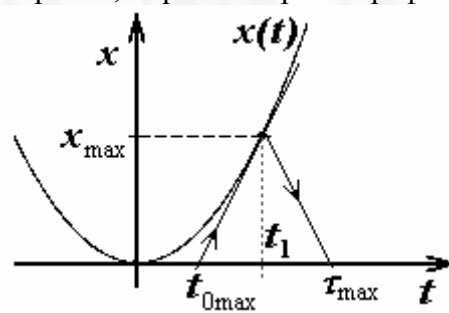


Графический анализ взаимного расположения графика движения объекта (парабола) и сигналов (лучей прямых) показывает (рис. 9), что от одного сигнала, испущенного в момент t_0 , может быть зарегистрировано два отражения τ_1, τ_2 — один раз сигнал догоняет объект, второй раз объект догоняет сигнал.

Возможна также ситуация, когда отраженных сигналов не будет — сигнал не может догнать объект, разогнавшийся до скорости большей скорости сигнала.

Граничным между этими случаями, является вариант, при котором график распространения сигнала является касательным к параболе — графику закона движения объекта (рис. 10). Легко понять, что в этом случае в момент отражения скорость объекта $v = at$ сравнивается со скоростью сигнала. Это позволяет найти этот момент (последней возможности догнать объект), используя уравнение $at_{1\max} = c$. Из которого следует

$$t_{1\max} = \frac{c}{a}. \quad (2.2)$$



В этот момент находится в точке с координатой

$$x_{\max} = \frac{a(t_{1\max})^2}{2} = \frac{c^2}{2a}. \quad (2.3)$$

Максимальный момент отправления сигнала, который может догнать объект, определяется формулой

$$t_{0\max} = t_{1\max} - \frac{x_{\max}}{c} = \frac{c}{2a}, \quad (2.4)$$

а соответствующий момент возвращения «последнего» сигнала

$$\tau_{\max} = t_{1\max} + \frac{x_{\max}}{c} = \frac{3c}{2a}, \quad (2.5)$$

На первый взгляд, кажется, что решение задачи опять надо разбивать на различные этапы, но ведь мы разработали другой метод решения, основанный на «привязке» к моменту регистрации, а не к моменту «запуска». Поэтому рассмотрим графическую иллюстрацию уравнения (3), включающего законы движения объекта и отраженного сигнала. Этот метод позволяет решить задачу единообразно для любого момента времени регистрации. Для графического анализа этого уравнения необходимо «зеркально» отразить рисунок 1.9, в результате получим рисунок 11. Здесь также есть значения моментов регистрации τ , которым соответствуют два момента отражения, следовательно,

и два изображения; есть значение τ_{\min} - минимальное время прихода отраженных сигналов (независимо от времени их отправления). Это время находится аналогично (2.5)

$$\tau_{\min} = -\frac{c^2}{2a} + \frac{c}{a} = -\frac{c}{2a}. \quad (2.6)$$

Таким образом, при $\tau > \tau_{\min}$ общее уравнение (3), имеющее вид

$$\frac{at_1^2}{2} = c(\tau - t_1), \quad (2.7)$$

имеет два корня

$$t_1(\tau) = -\frac{c}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 2\frac{c}{a}\tau}. \quad (2.8)$$

Соответствующие этим решениям законы движения изображений имеют вид

$$x'_{(1,2)} = c(\tau - t_1) = c\left(\tau + \frac{c}{a} \mp \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 2\frac{c}{a}\tau}\right) = \frac{c}{a}\left(a\tau + c\left(1 \mp \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 2\frac{c}{a}\tau}\right)\right). \quad (2.9)$$

Проанализируйте эти функции самостоятельно, их графики показаны на рисунке 1.12.

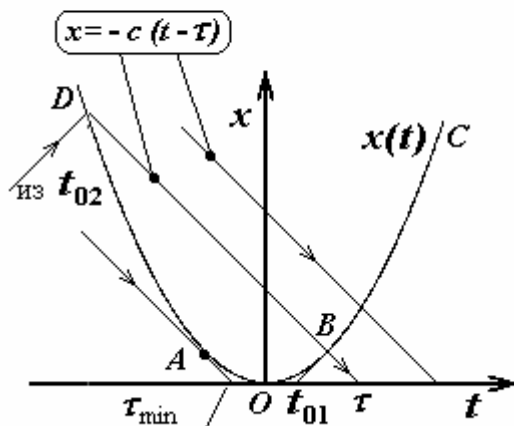


Рис. 1.11

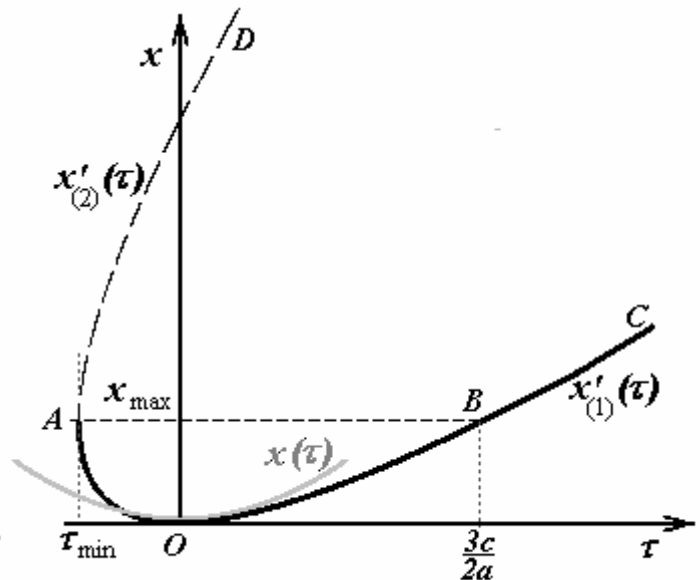


Рис. 1.12

Рассмотрите также физический смысл всех ветвей, соотнесите их с результатами проведенного качественного анализа. Для подсказки эти ветви обозначены на рис. 1.11 и 1.12 одинаково. А по существу, на них изображена одна и та же парабола, только повернутая и немного деформированная.

Задание 9.3 «Смеситель»

3.1 Для вычисления значения C рассмотрим процесс вытекания холодной воды при полностью открытом кране. При течении несжимаемой жидкости ее расход для обеих трубок должен быть один и тот же

$$q_{AB} = q_{BD}$$

Это будет возможно в том случае, если в точке B (рис. 1) трубки установится некоторое «самосогласованное» давление p_B , обеспечивающее прокачку соответствующего потока жидкости через каждую из трубок. Математически можем записать это условие в виде системы уравнений

$$q_{AB} = C(p_1 - p_B) = q_{BD} = C(p_B - p_0). \quad (1)$$

Из этого уравнения находим

$$p_B = \frac{p_1 + p_0}{2} = 2,0 \text{ атм.}$$

Соответственно, для расхода воды в этом случае получим

$$q_{AB} = C \frac{p_1 - p_0}{2} \Rightarrow C = \frac{2q_1}{p_1 - p_0} \quad (2)$$

Расчет по формуле (2) дает численное значение постоянной C

$$C = 1,4 \frac{\text{л}}{\text{с} \cdot \text{атм}} = 1,4 \cdot 10^{-8} \frac{\text{м}^3}{\text{с} \cdot \text{Па}}.$$

3.2 При полном открытии крана с горячей водой можно повторить рассуждения предыдущего пункта с той лишь разницей, что давление в магистрали равно p_2 , поэтому

$$q_2 = C \frac{p_2 - p_0}{2} = \frac{p_2 - p_0}{p_1 - p_0} q_1 = 1,1 \frac{\text{л}}{\text{с}}.$$

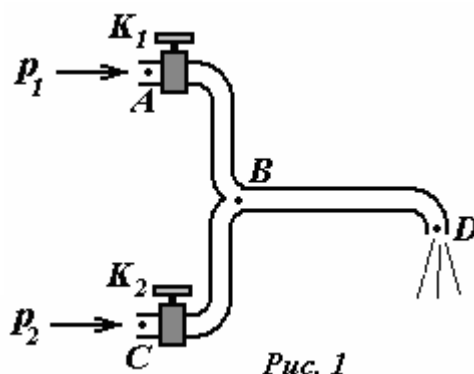
3.3 При полном открытии двух кранов в точке B системы должно установиться давление p_B , «обеспечивающее» прокачку через удлинитель BD суммарного потока q_3 , образованного слиянием двух (холодного q_1 и горячего q_2) потоков из труб AB и CB .

Соответственно, в этом случае справедлива система уравнений

$$\begin{aligned} q_1 &= C(p_1 - p_B) \\ q_2 &= C(p_2 - p_B) \\ q_3 &= q_1 + q_2 = C(p_B - p_0) \end{aligned} \quad (3)$$

Решение системы (3) дает следующие результаты

$$\begin{aligned} p_B &= \frac{p_1 + p_2 + p_0}{3}, \\ q_1 &= C \frac{2p_1 - p_2 - p_0}{3} = 1,1 \frac{\text{л}}{\text{с}} \\ q_2 &= C \frac{2p_2 - p_1 - p_0}{3} = 0,6 \frac{\text{л}}{\text{с}} \\ q_3 &= q_1 + q_2 = C \frac{p_1 + p_2 - 2p_0}{3} = 1,7 \frac{\text{л}}{\text{с}} \end{aligned} \quad (4)$$



Как видим из (4), расход горячей воды почти в два раза меньше расхода холодной, что объясняется бóльшим давлением в магистрали холодной воды. Это приводит к своеобразному эффекту «закупоривания» трубы с горячей водой и, соответственно, падению ее расхода. С этой точки зрения можем заметить, что сильный перепад давлений в магистралях крайне нежелателен.

Поскольку в смесителе потери теплоты практически отсутствуют (жидкости протекают через него достаточно быстро), то уравнение теплового баланса будет иметь вид

$$cm_1(T - T_1) = cm_2(T_2 - T), \quad (5)$$

где T — искомая температура воды на выходе из смесителя, c — удельная теплоемкость воды. Т.к. вода практически несжимаема, то можно считать, что ее плотность ρ в обеих магистралях одинакова. В этом случае $m_1 = \rho V = \rho q_1 t$ и $m_2 = \rho V = \rho q_2 t$, и из уравнения (5) получаем искомый результат

$$T_3 = \frac{q_1 T_1 + q_2 T_2}{q_1 + q_2} = 30^\circ\text{C}. \quad (6)$$

3.4 При различном открывании кранов система уравнений примет вид

$$\begin{aligned} q_1 &= \alpha_1 C(p_1 - p_B) \\ q_2 &= \alpha_2 C(p_2 - p_B) \\ q &= q_1 + q_2 = C(p_B - p_0) \end{aligned} .$$

Соответственно ее решение также несколько изменится

$$\begin{aligned} p_B &= \frac{\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + p_0}{1 + \alpha_1 + \alpha_2} \\ q_1 &= \alpha_1 C \frac{p_1(1 + \alpha_2) - \alpha_2 p_2 - p_0}{1 + \alpha_1 + \alpha_2} = 0,48 \frac{\text{л}}{\text{с}} \\ q_2 &= \alpha_2 C \frac{p_2(1 + \alpha_1) - \alpha_1 p_1 - p_0}{1 + \alpha_1 + \alpha_2} = 0,73 \frac{\text{л}}{\text{с}} \\ q_4 &= q_1 + q_2 = C \frac{\alpha_1(p_1 - p_0) + \alpha_2(p_2 - p_0)}{1 + \alpha_1 + \alpha_2} = 1,2 \frac{\text{л}}{\text{с}} \end{aligned} \quad (7)$$

Температуру воды на выходе из смесителя найдем с помощью выражения, аналогичного (6)

$$T_4 = \frac{q_1 T_1 + q_2 T_2}{q_1 + q_2} = 45^\circ\text{C}.$$

Если в качестве предельного перехода в выражениях (7) положить $\alpha_1 = \alpha_2 = 1,0$, то, как и следовало ожидать, получится система решений (4).

Таким образом, с помощью кранов мы можем регулировать температуру воды от полностью холодной ($T_1 = 10^\circ\text{C}$, $\alpha_1 = 1,0$, $\alpha_2 = 0,0$), до полностью горячей ($T_2 = 70^\circ\text{C}$, $\alpha_1 = 0,0$, $\alpha_2 = 1,0$).

3.5 Интересно, что как следует из (7), при некоторых давлениях p_1 и p_2 в магистралях и коэффициентах α_1 и α_2 поток горячей воды может обратиться в нуль. При этом в кран горячей воды будет «закачиваться» холодная, поскольку давление там меньше. Так иногда принимая душ, можно почувствовать, что вода стала прохладнее после того, как в соседней кабинке кто-то откроет кран с горячей водой. Для вычисления p_{\min} приравняем нулю выражение для q_2 из (7)

$$q_2 = \alpha_2 C \frac{p_2(1 + \alpha_1) - \alpha_1 p_1 - p_0}{1 + \alpha_1 + \alpha_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_2(1 + \alpha_1) - \alpha_1 p_1 - p_0 = 0 \quad (8)$$

Из равенства (8) найдем величину p_{min} , при которой вода в кране станет полностью холодной даже при открытом кране с горячей водой

$$p_{2min} = \frac{\alpha_1 p_1 + p_0}{1 + \alpha_1} = 1,5 \text{ атм.} \quad (9)$$

Как следует из (9), эффект «обратной тяги» не зависит от коэффициента α_2 открытия крана с горячей водой. Это вполне можно понять, поскольку независимо от размера отверстия, сплошная среда (жидкость или газ) всегда устремляется в область пониженного давления.



10 класс.

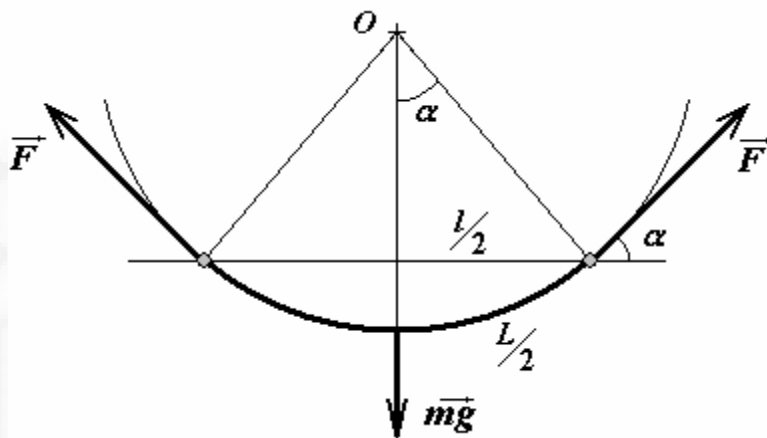
Задача 10.1.1

Условие равновесия цепи в проекции на вертикальное направление имеет вид

$$2F \sin \alpha = mg, \quad (1)$$

где F - сила натяжения цепи в крайних точках и равная ей сила, с которой надо удерживать веревку. Для определения угла α между касательной к цепи и горизонтом необходимо знать форму, которую принимает цепь под действием силы тяжести. Решение этой проблемы известно, но достаточно сложно. В данном случае расстояние между концами цепи немного меньше ее длины. Поэтому цепь изогнута слабо, ее профиль можно аппроксимировать

кривой второго порядка – проще всего дугой окружности. В этом приближении найти угол α не составляет труда. Проведя перпендикуляры к касательным в крайних точках, определим центр окружности O как точку их пересечения. Теперь длина участка цепи между нижней и крайней точками (она равна половине длины всей цепи $\frac{L}{2}$)



выражается формулой

$$\frac{L}{2} = R\alpha, \quad (2)$$

а длина половины хорды

$$\frac{l}{2} = R \sin \alpha \approx R \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6} \right) \quad (3)$$

где использована приближенная формула для синуса малого угла.

Отметим, что в линейном приближении различие между длиной дуги и стягивающей ее хорды отсутствует, поэтому необходимо использовать приближение следующего порядка.

Из формул (3) –(2) получаем соотношение

$$\frac{l}{L} = 1 - \frac{\alpha^2}{6}. \quad (4)$$

Обозначим $l = (1 - \eta)L$, где η - малый безразмерный параметр, согласно условию задачи $\eta = 0,10$. С использованием этого удобного обозначения значения искомого угла определяется формулой

$$\alpha \approx \sqrt{6\eta}. \quad (5)$$

Теперь из формулы (1) определяем значение силы

$$F = \frac{mg}{2 \sin \alpha} \approx \frac{mg}{2\sqrt{6\eta}} \approx 32H, \quad (6)$$

что больше половины веса веревки.

Для того чтобы оценить работу по выпрямлению веревки можно проинтегрировать выражение для силы в зависимости от параметра η (учитывая, что $x = (1-\eta)L$, $dx = -Ld\eta$)

$$A = \int_l^L F dx = L \int_0^{\eta_0} F d\eta = \frac{mgL}{2\sqrt{6}} \int_0^{\eta_0} \frac{d\eta}{\sqrt{\eta}} = \frac{mgL\sqrt{\eta_0}}{\sqrt{6}} \approx 30 \text{ Дж}.$$

Дополнения.

1. Отметим, что для полного выпрямления веревки необходимо приложить бесконечно большую силу: из формулы (6) следует, что при $\eta \rightarrow 0$ $F \rightarrow \infty$. Тем не менее, работа, совершенная при выпрямлении веревки, конечна.

2. Задача может быть решена и в более грубом приближении: если форму веревки считать в виде двух отрезков прямой линии.

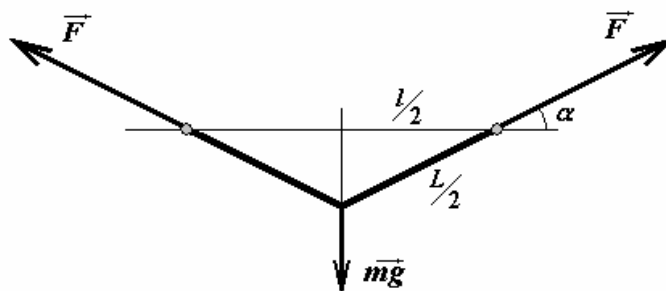
В этом приближении зависимость угла наклона приложенной к веревке силы определяется из очевидного

выражения $\cos \alpha = \frac{l}{L} = 1 - \eta$.

Так как угол наклона мал, то допустимо использовать

приближенную формулу $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$. Тогда искомый угол описывается формулой

$\alpha \approx \sqrt{2\eta}$, которая с точностью до постоянного коэффициента совпадает с использованной в решении формулой (5). Отличие между этими выражениями менее, чем в два раза, поэтому обе полученные оценки можно считать вполне приемлемыми.



Задача 10.1.2

Если мысленно заменить верхнюю пружину нерастяжимой веревкой, то под действием силы \vec{F} , направленной вниз, нить через гладкий блок растянет нижнюю пружину вверх на величину

$$\Delta x_1 = \frac{F}{k}.$$

Поскольку нить нерастяжима, то на такую же величину Δx_1 опустится конец A веревки.

Из условия равновесия конца A веревки следует, что сила натяжения нити при этом $T = F$.

Теперь «вернем» верхнюю пружину на место, ведь по условию задачи блок «подвижный». На блок вниз действуют две силы натяжения нити T (Рис. 2), а вверх — сила упругости \vec{F}_y верхней пружины. Из условия равновесия блока получим

$$F_y = k\Delta x_2 = 2T = 2F \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{2F}{k},$$

где Δx_2 — абсолютная деформация верхней пружины. Следовательно, в положении равновесия нижний конец верхней пружины (центр блока) опустится на Δx_2 .

Поскольку при опускании центра блока на Δx_2 «освободится» участок нити длиной $2\Delta x_2$, то результирующее смещение Δx вниз конца нити A с учетом деформаций обеих пружин составит

$$\Delta x = \Delta x_1 + 2\Delta x_2 = \frac{F}{k} + 2 \frac{2F}{k} = 5 \frac{F}{k}.$$

Для касания веревкой земли должно быть выполнено условие

$$\Delta x = h \Rightarrow \frac{5F}{k} = h \Rightarrow F = \frac{kh}{5}.$$

Расчет дает

$$F = \frac{kh}{5} = 10 \text{ Н}. \quad (1)$$

Поскольку при меньшем значении силы F конец A веревки не дотянет до земли (колебания в системе отсутствуют), то (1) дает искомое значение F_{\min}

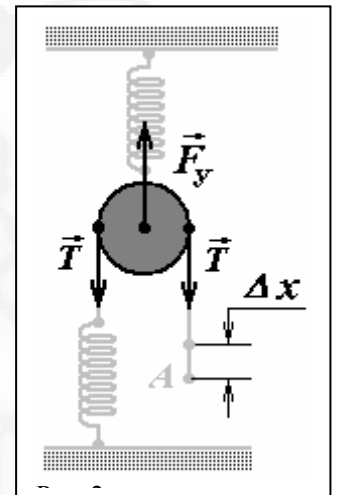
$$F_{\min} = \frac{kh}{5} = 10 \text{ Н}.$$

Дополнение.

Решение данной задачи можно сделать и покороче. Обозначим Δx_1 - деформацию нижней пружины. Тогда из условия равновесия блока и закона Гука следует, что деформация верхней пружины должна быть в два раза больше $\Delta x_2 = 2\Delta x_1$. Далее из условия нерастяжимости веревки, переброшенной через блок, следует, что ее конец опустится на расстояние $h = 2\Delta x_2 + \Delta x_1 = 5\Delta x_1$. Наконец, искомая сила натяжения веревки равна силе упругости нижней пружины, то есть

$$F = k\Delta x_1 = \frac{kh}{5}.$$

Впрочем, эти элементарные выкладки нуждаются в физических обоснованиях, приведенных в основном решении.



Задача 10.1.3

Поскольку электрическое сопротивление $R = \rho \frac{l}{S}$ пропорционально длине l проводника, то можем заметить, что сопротивление R_{i+1} каждого следующего вложенного квадрата меньше сопротивления R_i предыдущего в $\sqrt{2}$ раз

$$R_{i+1} = \frac{R_i}{\sqrt{2}}. \quad (1)$$

Преобразуем цепь, разорвав ее в эквипотенциальных точках E и F (Рис.2), лежащих на оси симметрии BD фрактала. Это не изменит искомого сопротивления R_F фрактала, поскольку по «разорванным» малым перемычкам ток все равно не идет из-за отсутствия напряжения на них.

Однако теперь можем заметить, что цепь между точками G и H (см. рис. 2) также представляет собой бесконечный фрактал, начальный размер которого ровно в два раза меньше размера исходного фрактала.

Следовательно, в силу (1) (примененного дважды!), сопротивление R_{GH} цепи между указанными точками также в два раза меньше искомого сопротивления «большого» фрактала

$$R_{GH} = \frac{R_F}{2}. \quad (2)$$

С учетом (2) электрическую схему можно перерисовать в виде, представленном на рис. 3.

Для дальнейшего преобразования схемы представим сопротивление $R_F/2$ как два параллельно соединенные сопротивления R_F , и вновь, в силу симметрии цепи, разорвем полученную схему в эквипотенциальных точках G и H . В результате получим еще более упрощенный вариант цепи фрактала, представленный на рис. 4.

Дальнейший расчет сопротивления цепи достаточно стандартен: нужно только помнить, что соединительные «проводачки» на данной схеме имеют разные сопротивления, каждое из которых пропорционально соответствующей длине.

Так для расчета сопротивления R_{IJ} цепи между точками I и J используем правила расчета для параллельного сопротивления

$$\frac{1}{R_{IJ}} = \frac{1}{R} + \frac{\sqrt{2}}{R} + \frac{1}{R_F + \frac{R}{\sqrt{2}}}, \quad (3)$$

где R_{AB} (сопротивление большой стороны фрактала) для удобства обозначено через R .

Из (3) находим

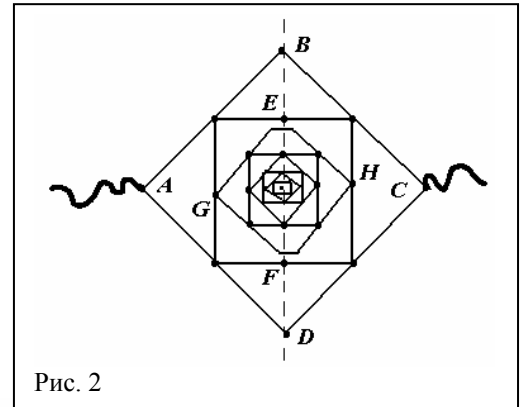


Рис. 2

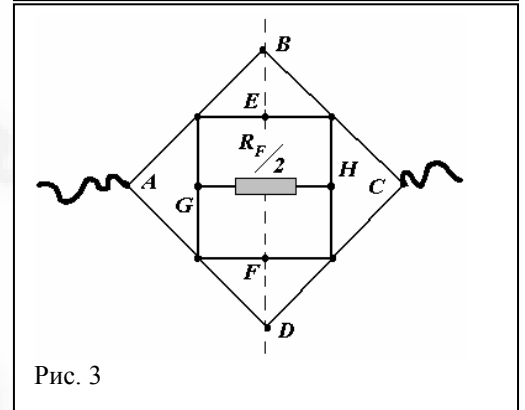


Рис. 3

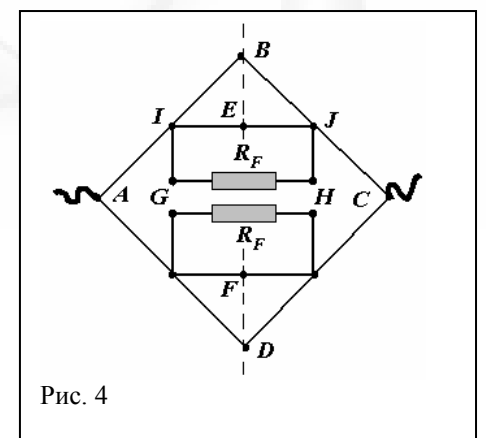


Рис. 4

$$R_{IJ} = \frac{R(\sqrt{2}R_F + R)}{(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2}R_F + R) + \sqrt{2}R}. \quad (4)$$

Соответственно, сопротивление R_{ABC} участка цепи найдем по правилам последовательного соединения

$$R_{ABC} = \frac{R(\sqrt{2}R_F + R)}{(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2}R_F + R) + \sqrt{2}R} + R. \quad (5)$$

Поскольку верхняя и нижняя части полученной цепи симметричны, то окончательное выражение для нахождения сопротивления фрактала принимает вид

$$R_F = \frac{R_{ABC}}{2} = \frac{\frac{R(\sqrt{2}R_F + R)}{(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2}R_F + R) + \sqrt{2}R} + R}{2}. \quad (6)$$

Относительно R_F (6) представляет собой квадратное уравнение

$$2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})R_F^2 + 2\sqrt{2}RR_F - (1 + 2\sqrt{2})R^2 = 0,$$

решения которого находим сравнительно легко (у нас получилось всего лишь с третьей попытки!).

Отрицательный корень ($R_F = -0,984R$) отбрасываем сразу, как не имеющий физического смысла. Окончательно

$$R_F = \frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})(1 + 2\sqrt{2})} - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})} R = 0,569R. \quad (7)$$

Расчет по (7) дает численное значение сопротивления цепи бесконечного квадратного фрактала

$$R_{AC} = R_F = 0,85 \text{ Ом}.$$

Задание 10.2

2.1 На верхний груз во время подскока действуют постоянные силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила мышц \vec{F} . Поэтому этот груз движется равноускоренно с ускорением равным

$$a = \frac{F - mg}{m} = (\eta - 1)g. \quad (1)$$

Его скорость в верхней точке v_1 легко находится из известной кинематической формулы $h = \frac{v_1^2}{2a}$, она равна

$$v_1 = \sqrt{2(\eta - 1)gh}. \quad (2)$$

После того как верхний груз достиг верхней точки, оба груза начинают двигаться вместе, причем скорость центра масс системы равна половине максимальной скорости верхнего груза

$$v_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(\eta - 1)gh} \approx 3,0 \frac{M}{c}. \quad (3)$$

Отметим, что в момент полного выпрямления часть механической энергии человека теряется – ситуация аналогична абсолютно неупругому удару.

Высота подъема определяется по формуле

$$H_1 = \frac{v_c^2}{2g} = \frac{(\eta - 1)}{4}h \approx 0,45m. \quad (4)$$

Время отталкивания можно рассчитать по формуле

$$t_1 = \frac{v_1}{a} = \sqrt{\frac{2h}{(\eta - 1)g}} \approx 0,10c. \quad (5)$$

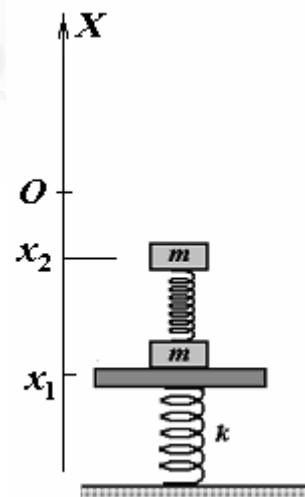
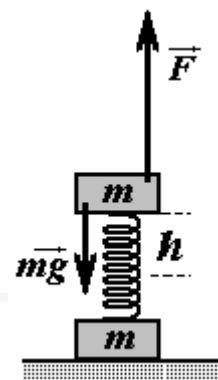
Определение КПД прыжка следует дать самостоятельно. Наиболее разумного его определить как отношение потенциальной энергии человека в верхней точки траектории к работе, совершенной во время подпрыгивания

$$K = \frac{2mgH_1}{Fh} = \frac{\eta - 1}{2\eta} \approx 0,43. \quad (6)$$

2.2 Учитывая, что время прыжка в десять раз превышает период колебаний, можно пренебречь изменением ускорения платформы за время отталкивания. Кроме того, в условии не задан момент начала прыжка, поэтому его надо выбрать из условия максимальности достигаемой высоты. Совместим начало отсчета вертикальной оси Ox со средним положением платформы, координату платформы (и нижнего груза) обозначим x_1 , а верхнего груза x_2 . Отсчет времени начнем в тот момент, когда платформа находится в крайнем нижнем положении.

Пусть человек начал прыжок в момент времени τ , когда координата, скорость и ускорения платформы (а также обоих грузов) соответственно равны

$$\begin{aligned} x_{20} &= -A \cos \omega \tau \\ v_0 &= A \omega \sin \omega \tau \\ a_0 &= A \omega^2 \cos \omega \tau \end{aligned} \quad (7)$$



Эти величины являются начальными для процесса отскока.

Процесс отталкивания проще всего описывать в системе отсчета, связанной с платформой (не смотря на то, что эта система отсчета не инерциальная⁵). Описание движения верхнего груза полностью аналогично п.2.1 . Относительное ускорение верхнего тела равно

$$a' = \frac{F - m(g + a_0)}{m} = \left(\eta - 1 - \frac{a_0}{g} \right) g = (\eta - 1)g \left(1 - \frac{a_0}{g(\eta - 1)} \right). \quad (8)$$

Поэтому относительная скорость верхнего груза в момент максимального распрямления равна

$$v'_1 = \sqrt{2a'h} = \sqrt{2(\eta - 1)gh \left(1 - \frac{a_0}{g(\eta - 1)} \right)} = \sqrt{2(\eta - 1)gh \left(1 - \frac{A\omega^2 \cos \omega\tau}{g(\eta - 1)} \right)}. \quad (9)$$

Численная оценка⁶ безразмерной величины $\frac{A\omega^2}{g(\eta - 1)} \approx 0,13$, позволяет использовать приближенное значение этой скорости

$$v'_1 = \sqrt{2(\eta - 1)gh \left(1 - \frac{A\omega^2 \cos \omega\tau}{g(\eta - 1)} \right)} \approx \sqrt{2(\eta - 1)gh} \cdot \left(1 - \frac{A\omega^2 \cos \omega\tau}{2g(\eta - 1)} \right). \quad (10)$$

.Возвращаясь в систему отсчета, связанную с поверхности земли, запишем выражения для скоростей обоих грузов в момент максимального подъема верхнего:

$$v_1 = v_0 + v'_1 = A\omega \sin \omega\tau + \sqrt{2(\eta - 1)gh} \cdot \left(1 - \frac{A\omega^2 \cos \omega\tau}{2g(\eta - 1)} \right). \quad (11)$$

$$v_2 = v_0 = A\omega \sin \omega\tau$$

Скорость центра масс человека в момент отрыва равна

$$v_c = \frac{v_1 + v_2}{2} = A\omega \sin \omega\tau + \frac{1}{2} \sqrt{2(\eta - 1)gh} \cdot \left(1 - \frac{A\omega^2 \cos \omega\tau}{2g(\eta - 1)} \right). \quad (12)$$

Для достижения максимальной высоты прыжка она должна быть максимальна. Максимум этой функции легко определяется (по аналогии с определением амплитуды колебаний) с помощью известных преобразований

$$\begin{aligned} v_c &= \frac{1}{2} \sqrt{2(\eta - 1)gh} + A\omega \sin \omega\tau - \frac{1}{2} \sqrt{2(\eta - 1)gh} \cdot \frac{A\omega^2 \cos \omega\tau}{2g(\eta - 1)} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2(\eta - 1)gh} + \sqrt{(A\omega)^2 + (A\omega)^2 \frac{\omega^2 h}{8g(\eta - 1)}} \sin(\omega\tau - \varphi) \end{aligned}, \quad (13)$$

Максимальное значение этого выражения достигается, когда аргумент синуса равен $\frac{\pi}{2}$, и оно равно

$$v_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(\eta - 1)gh} + \sqrt{(A\omega)^2 + (A\omega)^2 \frac{\omega^2 h}{8g(\eta - 1)}} = \frac{1}{2} \sqrt{2(\eta - 1)gh} + A\omega \sqrt{1 + \frac{\omega^2 h}{8g(\eta - 1)}}. \quad (14)$$

Первое слагаемое в данном выражении есть скорость, развиваемая человеком при прыжке с твердой поверхности, второе слагаемое – добавка обусловленная движением платформы.

⁵ Не намного сложнее и решение в обычной инерциальной системе отсчета, связанной с поверхностью земли.

Теперь можно найти высоту прыжка по формуле $H_2 = \frac{v_c^2}{2g}$. Численные расчеты приводят к следующим результатам $v_c \approx 4,91 \frac{M}{c}$, $H_2 \approx 1,2m$, что почти в три раза превышает высоту прыжка с твердой поверхности.

Достаточно интересно проанализировать формулу (13). В ней $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{\omega^2 h}{8g(\eta-1)}} \approx 0,06$. Из условия $\sin(\omega\tau - \varphi) = 1$ находим, что фаза колебаний в момент прыжка должна быть равна $\omega\tau = \frac{\pi}{2} + \varphi$. То есть – оптимальный момент прыжка после прохождения платформой своего среднего положения, что качественно объяснимо. Платформа «помогает» прыгуну по двум причинам: во-первых, она сама имеет некоторую скорость, во-вторых, при отрицательном ускорении прыгуну легче разогнать верхнюю часть своего тела, так как его вес уменьшается.

2.3 При решении задачи этого пункта следует воспользоваться законом сохранения момента импульса, если, по-прежнему, считать время вставания малым. За малый промежуток времени действием момента силы тяжести можно пренебречь. Пусть за малый промежуток времени, когда качели находятся под углом α к вертикали, человек (в рамках рассматриваемой модели) поднял часть своего тела на расстояние h . Используя закон сохранения момента импульса, найдем изменение его угловой скорости. Если до начала вставания угловая скорость вращения качелей равнялась ω_0 и оба груза находились в нижнем положении, то момент импульса был равен $2mL^2\omega_0$. После вставания угловая скорость стала равной ω , тогда момент импульса выражается формулой $m\omega(L^2 + (L-h)^2)$. Приравнивая эти два выражения, получим уравнение

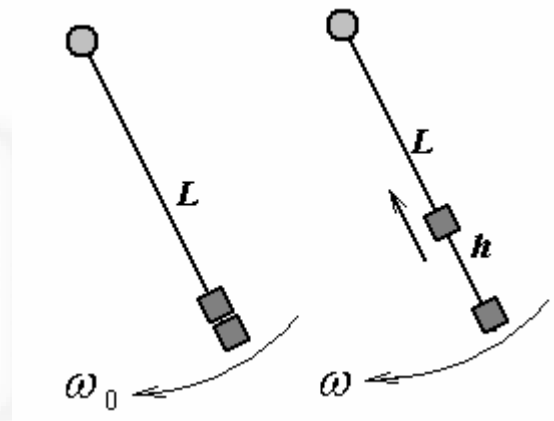
$$m\omega(L^2 + (L-h)^2) = 2mL^2\omega_0, \quad (15)$$

из которого не трудно найти новое значение угловой скорости:

$$\omega = \frac{2L^2}{L^2 + ((L-h)^2)} \omega_0 = \frac{2}{1 + \left(1 - \frac{h}{L}\right)^2} \omega_0. \quad (16)$$

Анализ формулы (15) показывает, что, во-первых, при вставании угловая скорость возрастает, а когда человек садится (в этом случае h можно считать отрицательной), то угловая скорость падает, во-вторых, возрастание скорости пропорционально ее начальному значению. Отсюда следует вывод – для наиболее эффективного раскачивания необходимо вставать в нижней точке (когда угловая скорость максимальна), а садится в верхних (когда угловая скорость вообще равна нулю), причем за один период колебаний это можно сделать дважды.

К этому же выводу о методике раскачивания можно прийти и на основании рассмотрения преобразования энергии. Действительно, в нижней точке вес человека максимален, поэтому при вставании он должен совершить большую работу, тем самым, увеличивая энергию системы. Так как процесс раскачивания должен быть периодическим, человек где-то должен присесть, при этом энергия системы уменьшается, ее



уменьшение будет тем меньше, чем меньше угловая скорость в момент приседания, поэтому эффективнее всего присесть в верхних точках траектории. Отметим также, что для корректного расчета изменения скорости движения необходимо учитывать, что в процессе вставания (и приседания) сила мышц не остается постоянной.

Итак, будем считать, что в верхней (начальной) точке угол отклонения равен α_0 , тогда на основании закона сохранения энергии можно записать уравнение

$$2mgL(1 - \cos \alpha_0) = \frac{2mL^2 \omega_0^2}{2}, \quad (17)$$

где ω_0 - угловая скорость в нижней точке, которая выражается из этого уравнения:

$$\omega_0^2 = 2 \frac{g}{L} (1 - \cos \alpha_0). \quad (18)$$

Применим теперь аналогичные энергетические рассуждения для определения максимального угла отклонения после того, как человек встал в нижней точке:

$$\frac{m(L^2 + (L-h)^2) \omega_1^2}{2} = m(L+L-h)g(1 - \cos \alpha_1).$$

Из уравнений (19), (18) и (16), следует, что максимальный и начальный углы отклонения связаны соотношением

$$(1 - \cos \alpha_1) = \beta(1 - \cos \alpha_0), \quad (19)$$

где обозначено $\beta = \frac{4}{1 + (1 - h/L)^2} \cdot \frac{1}{2 - h/L} \approx 1,16$ - постоянный для рассматриваемой

системы коэффициент. Такое же соотношение связывает углы после первого и второго вставаний

$$(1 - \cos \alpha_2) = \beta(1 - \cos \alpha_1) = \beta^2(1 - \cos \alpha_0). \quad (20)$$

Расчеты приводят к следующим численным результатам: при $\alpha_0 = 10^\circ$ $\alpha_1 \approx 10,8^\circ$, $\alpha_2 \approx 11,6^\circ$.

Интересно также подсчитать, сколько вставаний должен совершить человек, чтобы «крутануть солнышко». Для этого рекуррентную формулу (19) можно представить в явном виде

$$(1 - \cos \alpha_k) = \beta^k (1 - \cos \alpha_0)$$

из которого можно выразить число циклов N до полного оборота (пока косинус не

станет равным -1). Результат расчетов $N = \frac{\ln \frac{2}{1 - \cos \alpha_0}}{\ln \beta} \approx 30$ (15 полных колебаний) -

многовато, может и не хватить сил! Причем, основная часть этих усилий затрачивается на начальную раскачку, так для того, чтобы раскрутиться от 90° до 180° достаточно пяти вставаний!

2.4 При решении этого пункта следует воспользоваться основными результатами, полученными в предыдущем. Так, за время вставания в нижней точке угловая скорость вращения увеличится от ω_0 до ω_1 , определяемой формулой (16)

$$\omega_1 = \frac{2}{1 + (1 - (h/L))^2} \omega_0. \quad (21)$$

Как мы выяснили, присесть надо в том месте, где угловая скорость минимальна, в данном случае - в верхней точке окружности (будем считать, что качели с человеком ее

достигают). На основании закона сохранения энергии для движения от нижней до верхней точек запишем

$$\frac{mL^2 + m(L-h)^2}{2} \omega_1^2 = \frac{mL^2 + m(L-h)^2}{2} \omega_2^2 + 2mg(L+L-h). \quad (22)$$

Из этого уравнения выразим угловую скорость ω_2 в верхней точке окружности

$$\omega_2^2 = \omega_1^2 - 4 \frac{g}{L} \frac{2-h/L}{1+(1-h/L)^2}. \quad (23)$$

Еще раз применим формулу (16) для расчета угловой скорости ω_3 после «приседания вверх» в верхней точке, заменив в ней h на $(-h)$

$$\omega_3 = \frac{2}{1+(1-(h/L))^2} \omega_2. \quad (24)$$

Наконец еще раз применим уравнения закона сохранения энергии для движения от верхней точки до нижней

$$\frac{2mL^2}{2} \omega_4^2 = \frac{2mL^2}{2} \omega_3^2 + 2mg \cdot 2L. \quad (25)$$

из которого получим формулу, аналогичную (23):

$$\omega_4^2 = \omega_3^2 + 4 \frac{g}{L}. \quad (26)$$

Последовательные подстановки и численные расчеты приводят к следующим результатам:

$$\begin{aligned} \omega_1 &\approx 1,05\omega_0; \quad \omega_2^2 = 1,10\omega_0^2 - 4,20 \frac{g}{L}; \quad \omega_3^2 = 1,22\omega_2^2 = 1,34\omega_0^2 - 5,12 \frac{g}{L}; \\ \omega_4^2 &= 1,34\omega_0^2 - 1,12 \frac{g}{L}. \end{aligned} \quad (27)$$

Учитывая, что второе слагаемое меньше первого (так минимальная скорость, необходимая для того, чтобы сделать один полный оборот должна удовлетворять условию $\omega_0^2 > 4 \frac{g}{L}$), можно приближенно записать (а можно и не записывать) $\omega_4 \approx 1,16\omega_0$. Иными словами, за один оборот угловая скорость может быть увеличена на 15% - пока хватит сил, чтобы вставать и приседать.

Строго говоря, не лишним было бы привести и оценку силы, которую должны развивать мышцы ног в этом гимнастическом упражнении. Но, наш гимнаст силен! – он может развивать силу в три с половиной раза превышающую его вес, поэтому будьте уверены, что этой силы хватит!

Задание 10.3. Решение.

Часть 1. «Ионные радиусы».

Рассмотрим кристалл поваренной соли объемом V . Его масса равна

$$m = \rho V \quad (1)$$

С другой стороны масса кристалла равна

$$m = Nm_{Na} + Nm_{Cl} = N(M_{Na} + M_{Cl}) / N_A \quad (2)$$

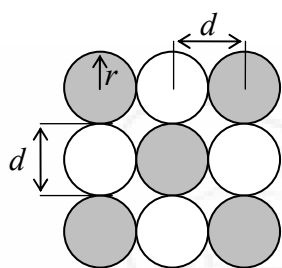
где N — число атомов одного и другого сорта в кристалле, $M_{Na} = 23,0 \cdot 10^{-3} \text{ кг / моль}$ и $M_{Cl} = 35,5 \cdot 10^{-3} \text{ кг / моль}$ — молярные массы натрия и хлора соответственно.

Расстояние между ионами равно их диаметру d . Радиус иона r . На каждый атом приходится объем

$$v = d^3 = (2r)^3 \quad (3).$$

Всего в объеме V находится

$$N = \frac{1}{2} \frac{V}{v} = \frac{1}{2} \frac{V}{d^3} \quad (4)$$



атомов одного сорта.

Из формул (1), (2), (4) определяем

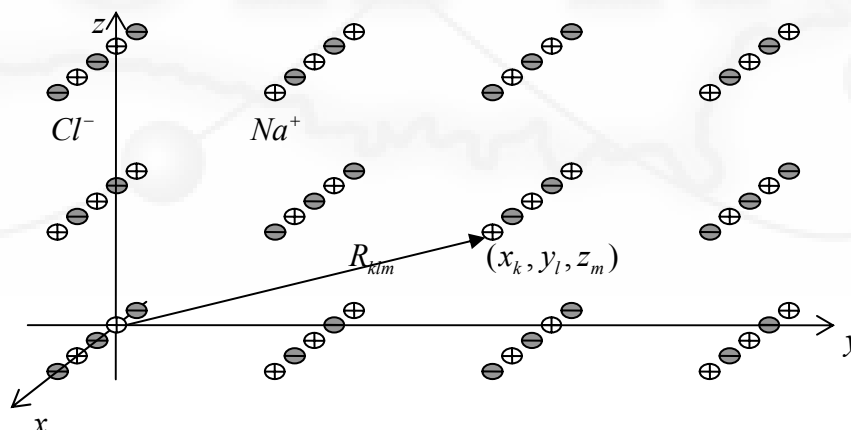
$$\rho V = \frac{1}{2} \frac{V}{d^3} \frac{M_{Na} + M_{Cl}}{N_A} \quad \rho = \frac{1}{2d^3} \frac{M_{Na} + M_{Cl}}{N_A}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{Na} + M_{Cl}}{2\rho N_A}} \quad (5) \quad r = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{M_{Na} + M_{Cl}}{2\rho N_A}} \quad (6)$$

$$d \approx 2,82 \cdot 10^{-10} \text{ м} \quad r \approx 1,41 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$

Часть 2. «Растворимость»

2.1 Для расчета энергии взаимодействия иона со всеми остальными выберем систему координат с началом отсчета в центре некоторого иона (для определенности, пусть это будет ион Na^+), а оси системы координат направим вдоль ребер кубической решетки



(кружками на рисунке обозначены центры ионов).

Координаты некоторого иона $x_k = kd, y_l = ld, z_m = md$, где k, l, m — целые числа, порядковые номера иона по осям Ox, Oy, Oz соответственно. Расстояние от начала отсчета до иона (k, l, m) равно

$$R_{klm} = d\sqrt{k^2 + l^2 + m^2} \quad (7)$$

Заряд иона натрия в начале координат равен $+e$ (абсолютная величина заряда электрона), его ближайшие соседи с номерами $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(-1,0,0)$, $(0,-1,0)$, $(0,0,-1)$ — ионы хлора с зарядом $-e$. Далее, ионы с номерами $(-2,0,0)$, $(-1,-1,0)$, $(1,1,0)$, $(2,0,0)$ — ионы натрия с зарядом $+e$, и т. д. Нетрудно заметить, что ионы, сумма индексов которых нечетное число — это ионы хлора с зарядом $-e$, а ионы, сумма индексов которых четное число — это ионы натрия с зарядом $+e$. Удобно это записать так: заряд иона (k, l, m)

$$q_{klm} = (-1)^{k+l+m} e \quad (8)$$

Энергия электростатического взаимодействия двух зарядов q_1 и q_2 , расстояние между которыми R равна

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R} \quad (9)$$

При этом на каждый заряд приходится половина энергии, т.е.

$$W^* = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R} \quad (10)$$

Чтобы найти энергию электростатического взаимодействия, приходящуюся на один ион, надо просуммировать величины

$$W_{klm}^* = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q_{000} q_{klm}}{R_{klm}} \quad (11)$$

для всех ионов кристалла (кроме иона $(0,0,0)$), т.е. найти такую сумму

$$W_{\text{вз}} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 d} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{\substack{m=-\infty \\ k^2+l^2+m^2 \neq 0}}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+l+m}}{[k^2 + l^2 + m^2]^{3/2}} = C_1 \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 d} \quad (12)$$

где $C_1 \approx -1,75$ численное значение тройной суммы. Численное значение искомой энергии равно

$$W_{\text{вз}} \approx -7,14 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = -4,46 \text{ эВ}.$$

2.2. В этом пункте задачи мы считаем растворяемый кристалл состоящим из ионов — жестких непроводящих сфер, а растворитель — сплошной диэлектрической жидкой средой, характеризующейся относительной диэлектрической проницаемостью ϵ , хотя на самом деле растворитель тоже состоит из отдельных молекул.

Для того, что бы ионный кристалл растворился в жидкости, энергия взаимодействия ионов с растворителем должна быть меньше энергии взаимодействия отдельного иона со всеми остальными в кристалле. Будем считать, что концентрация ионов в растворе мала, так что их электростатическим взаимодействием друг с другом можно пренебречь.

Подчеркнем, что рассчитанная в предыдущем разделе энергия взаимодействия является частью полной энергии электростатического поля. Последняя может быть представлена в виде суммы собственных энергий отдельных ионов (энергия поля, создаваемого уединенным ионом в вакууме)

$$W_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d} \quad (13)$$

и рассчитанной энергии взаимодействия (12). Полная энергия электростатического поля иона в растворе находится по формуле

$$W_{\text{эс}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 d}. \quad (14)$$

Она также равна сумме собственной энергии иона (13) и энергии взаимодействия иона с молекулами растворителя.

Следовательно, для оценки минимальной диэлектрической проницаемости, необходимой для растворения соли можно найти из соотношения

$$C_1 \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 d} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_{\min}\epsilon_0 d} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d}, \quad (15)$$

из которого следует

$$\epsilon_{\min} = \frac{1}{1 + C_1/2} \quad (13)$$

или $\epsilon_{\min} \approx 8,0$.

2.3 Относительная диэлектрическая проницаемость воды $\epsilon > \epsilon_{\min}$, значит, соль в ней будет растворяться. Поскольку энергия иона в воде будет меньше, чем энергия в кристалле, избыток энергии выделится в виде теплоты. При растворении одного иона выделяется теплота Q_0 . Её мы определим из закона сохранения энергии

$$W_{\text{кр}} + W_{\text{эз}} = W_{\text{эс}} + Q_0 \quad (14)$$

$$Q_0 = W_{\text{кр}} + W_{\text{эз}} - W_{\text{эс}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d} + C_1 \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 d} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 d} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d} \left(1 + \frac{C_1}{2} - \frac{1}{\epsilon}\right) \quad (15)$$

Численное значение этой величины равно $Q_0 = 9,20 \cdot 10^{-20}$ Дж. В 1кг поваренной соли

содержится $N_1 = \frac{1,00\text{кг}}{(23,0 + 35,5) \cdot 10^{-3} \text{кг/моль}} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \text{моль}^{-1} = 1,03 \cdot 10^{25}$ ионов, поэтому

удельная теплота растворения

$$H = N_1 Q_0 \quad (16)$$

численно $H = 9,48 \cdot 10^5$ Дж / кг = 948кДж / кг.

Дополнение.

Позволим себе более подробное объяснение расчета энергии взаимодействия иона с растворителем.

Собственная электростатическая энергия иона в вакууме – это энергия электрического поля. Интеграл от плотности энергии поля по всему пространству дает

$$W_0 = \int \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} dV = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad (\partial 1)$$

что и есть собственная энергия равномерно заряженной сферы.

Интеграл от плотности электрической энергии по всему пространству для двух ионов в вакууме

$$\begin{aligned} W_0 &= \int \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} dV = \int \frac{\epsilon_0 (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2}{2} dV = \int \frac{\epsilon_0 \vec{E}_1^2}{2} dV + \int \frac{\epsilon_0 \vec{E}_2^2}{2} dV + \int \epsilon_0 \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 dV = \\ &= \frac{q_1^2}{8\pi\epsilon_0 r} + \frac{q_2^2}{8\pi\epsilon_0 r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R} = W_1 + W_2 + W_{12} \end{aligned} \quad (\partial 2)$$

представляет собой сумму собственных энергий каждого из ионов и энергии их взаимодействия. Первые два слагаемых в этой сумме являются постоянными величинами, не зависящими от расстояния между ионами. Поэтому при расчете изменения энергии при изменении расстояния достаточно учитывать только последнее слагаемое.

Аналогично, энергия иона в кристалле будет складываться из его собственной электростатической энергии и энергии взаимодействия со всеми остальными, приходящейся на один ион

$$W_{кр} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} + C_1 \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 d} \quad (d3)$$

Таким образом, полученная формула (12) описывает не полную энергию поля, только ее изменяющуюся часть (энергию взаимодействия).

При расчете изменения энергии при переходе иона в раствор также необходимо учитывать только эту изменяющуюся часть энергии – именно эта часть энергии равна разности между (14) и (13). Выражение для полной энергии поля (14), создаваемого ионом (и поляризационными зарядами!) вычисляется как интеграл по всему пространству от плотности энергии

$$W_0 = \int \frac{\epsilon\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} dV = \frac{q^2}{8\pi\epsilon\epsilon_0 r} \quad (d4)$$

в ϵ раз меньше, чем для иона в вакууме из-за поляризации диэлектрика. Также следует отметить, что мы пренебрегли энергией взаимодействия ионов между собой в растворе, полагая расстояние между ними значительно большим размеров иона.

11 класс.

Задание 1. «Дырявая резинка»

Задача 1.1

Напряженность электрического поля внутри однородно заряженного с плотностью ρ цилиндра можно найти по теореме Гаусса.

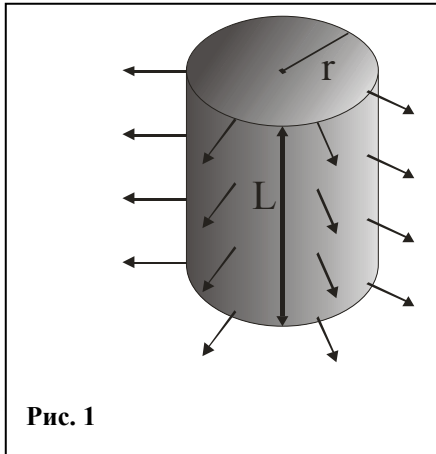


Рис. 1

$$E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \quad (1)$$

или в векторной форме

$$\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{2\epsilon_0} \quad (2)$$

Распределение потенциала внутри цилиндра рассчитаем как

$$\varphi = -\int E(r)dr = -\frac{\rho r^2}{4\epsilon_0} + C \quad (3)$$

Поле внутри малого цилиндра нетрудно найти при помощи метода наложений, представив его как сумму полей сплошного цилиндра радиуса R_1 с плотностью заряда ρ_1 и цилиндра радиуса R_2 с плотностью заряда $\rho_2 - \rho_1$ (рис.2).

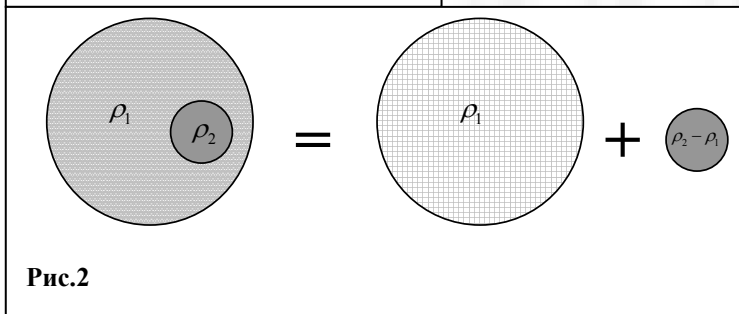


Рис.2

В произвольной точке А с радиус-вектором \vec{r}_1 относительно оси большего цилиндра и \vec{r}_2 относительно оси малого (рис. 3) поле равно:

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho_1 \vec{r}_1}{2\epsilon_0} + \frac{(\rho_2 - \rho_1) \vec{r}_2}{2\epsilon_0} = \frac{\rho_1 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{2\epsilon_0} + \frac{\rho_2 \vec{r}_2}{2\epsilon_0} = \left\{ \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{a} \right\} = \frac{\rho_1 \vec{a}}{2\epsilon_0} + \frac{\rho_2 \vec{r}_2}{2\epsilon_0} \quad (4)$$

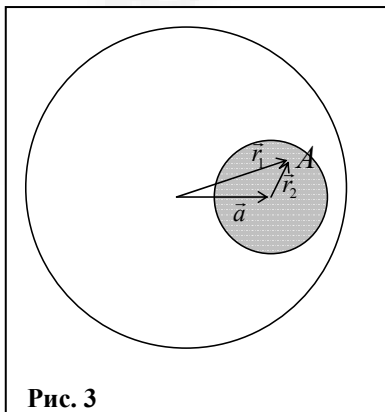


Рис. 3

т.е. поле внутри меньшего цилиндра представляет собой суперпозицию постоянного поля и поля, линейно зависящего от \vec{r}_2 .

Для дальнейших рассуждений выберем систему координат xOy с началом отсчета на оси малого цилиндра (рис. 4) и выразим в явном виде распределение потенциала внутри малого цилиндра

Распределение потенциала, соответствующее постоянному полю описывается формулой

$$\varphi_1 = -\frac{\rho_1}{2\epsilon_0} ax + C_1 \quad (4)$$

а распределение потенциала, соответствующее полю, линейно зависящему от радиус-вектора

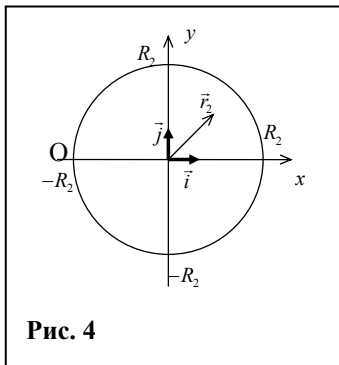


Рис. 4

$$\varphi_2 = -\frac{\rho_2 r_2^2}{4\varepsilon_0} + C_2 = -\frac{\rho_2(x^2 + y^2)}{4\varepsilon_0} + C_2 \quad (5)$$

Таким образом, потенциал внутри малого цилиндра описывается формулой

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = -\left[\frac{\rho_1 a x}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho_2(x^2 + y^2)}{4\varepsilon_0}\right] + C \quad (6)$$

Очевидно, линии равного потенциала в данном случае – окружности. Действительно, после очевидных математических преобразований функцию (6) можно переписать в следующем виде

$$\varphi = -\frac{\rho_2}{4\varepsilon_0} \left[\left(x + \frac{\rho_1}{\rho_2} a\right)^2 + y^2 \right] + \frac{\rho_2}{4\varepsilon_0} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} a\right)^2 + C \quad (7)$$

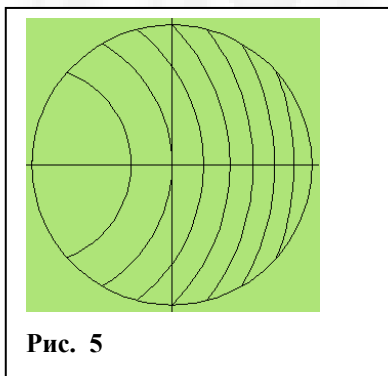


Рис. 5

откуда видно, что центр эквипотенциальных окружностей находится в точке $\left(-\frac{\rho_1}{\rho_2} a, 0\right)$, которая в нашем случае

(поскольку $\frac{\rho_1}{\rho_2} a = \frac{7,08}{1,77} 5,0 \text{ см} = 2,0 \text{ см} = R_2$) будет находиться

в точке O (рис. 4) – на границе малого цилиндра.

Вид эквипотенциальных линий приведен на рис. 5.

Задача 1.2

Прежде всего, необходимо найти плотность тока в большом и малом цилиндрах, что сводится к решению задачи о параллельном соединении резисторов.

Токи, текущие в большом и малом цилиндрах соответственно равны

$$I_1 = I \frac{r_2}{r_1 + r_2} = I \frac{\rho_2 \frac{L}{\pi R_2^2}}{\rho_1 \frac{L}{\pi(R_1^2 - R_2^2)} + \rho_2 \frac{L}{\pi R_2^2}} = I \frac{1}{1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}} \quad (1)$$

$$I_2 = I \frac{r_1}{r_1 + r_2} = I \frac{\rho_1 \frac{L}{\pi(R_1^2 - R_2^2)}}{\rho_1 \frac{L}{\pi(R_1^2 - R_2^2)} + \rho_2 \frac{L}{\pi R_2^2}} = I \frac{1}{1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_2^2}} \quad (2)$$

Плотность тока в большом и малом цилиндрах соответственно:

$$j_1 = \frac{I_1}{\pi(R_1^2 - R_2^2)} = \frac{I}{\pi(R_1^2 - R_2^2)} \frac{1}{1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}} \quad (3)$$

$$j_2 = \frac{I_2}{\pi R_2^2} = \frac{I}{\pi R_2^2} \frac{1}{1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_2^2}} \quad (4)$$

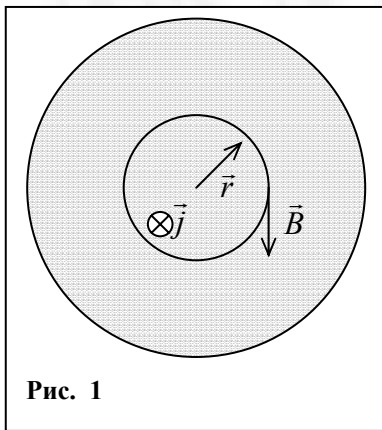


Рис. 1

Численные расчеты приводят к результатам

$$j_1 = 3,37 \cdot 10^4 \text{ A/m}^2$$

$$j_2 = 2,70 \cdot 10^5 \text{ A/m}^2$$

Магнитное поле внутри цилиндра, по которому течет ток с плотностью \vec{j} можно найти по теореме о циркуляции вектора магнитной индукции:

$$B = \frac{\mu_0 j}{2} r \quad (5)$$

Что удобно представить в векторном виде

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} [\vec{j} \times \vec{r}] = \frac{\mu_0 j}{2} [\vec{n} \times \vec{r}] \quad (6)$$

где \vec{n} — единичный вектор, сонаправленный с вектором \vec{j} .

Магнитное поле внутри малого цилиндра нетрудно найти при помощи метода наложений, представив его как сумму полей сплошного цилиндра радиуса R_1 с плотностью протекающего тока j_1 и цилиндра радиуса R_2 с плотностью протекающего тока $j_2 - j_1$ (рис.2).

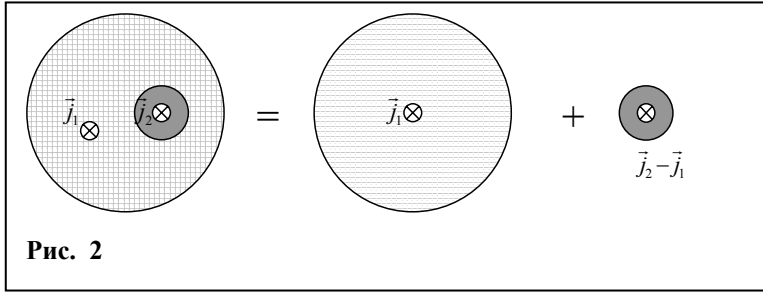


Рис. 2

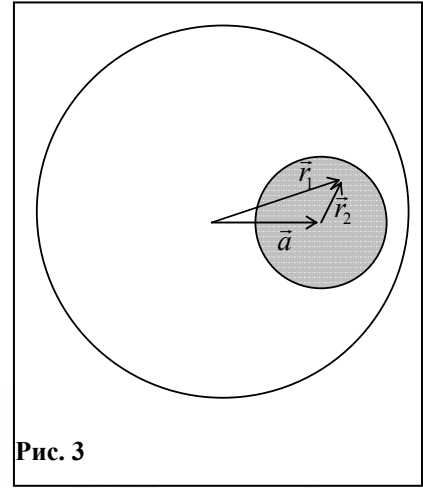


Рис. 3

В точке А с радиус-вектором \vec{r}_1 относительно оси большего цилиндра и \vec{r}_2 относительно оси малого (рис.3) поле равно:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 j_1}{2} [\vec{n} \times \vec{r}_1] + \frac{\mu_0 (j_2 - j_1)}{2} [\vec{n} \times \vec{r}_2] = \\ &= \frac{\mu_0 j_1}{2} [\vec{n} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)] + \frac{\mu_0 j_2}{2} [\vec{n} \times \vec{r}_2] = \frac{\mu_0 j_1}{2} [\vec{n} \times \vec{a}] + \frac{\mu_0 j_2}{2} [\vec{n} \times \vec{r}_2] \end{aligned} \quad (7)$$

т.е. поле внутри меньшего цилиндра представляет собой суперпозицию постоянного поля и кругового поля, модуль которого линейно зависит от \vec{r}_2 .

Выберем систему координат xOy с началом отсчета на оси малого цилиндра (рис.6). Векторы \vec{i}, \vec{j} — орты системы координат.

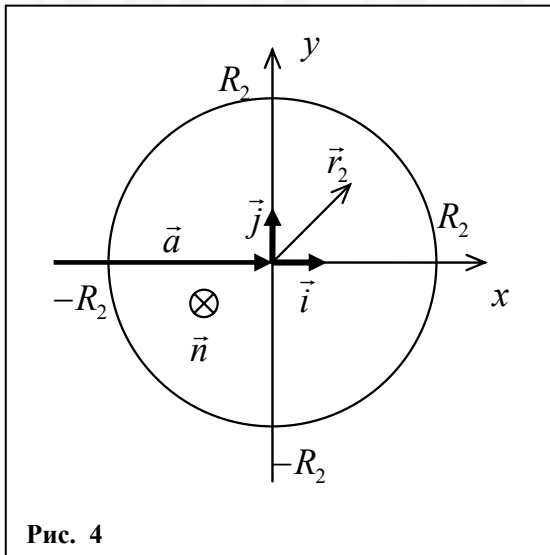


Рис. 4

Векторные произведения, фигурирующие в этих выражениях представим в явном виде

$$\vec{n} \times \vec{a} = a[\vec{n} \times \vec{i}] = -a\vec{j} \quad (8)$$

$$\vec{n} \times \vec{r}_2 = [\vec{n} \times (x\vec{i} + y\vec{j})] = y\vec{i} - x\vec{j} \quad (9)$$

Вектор индукции магнитного поля запишется в виде

$$\begin{aligned} \vec{B} &= -\frac{\mu_0 j_1 a}{2} \vec{j} + \frac{\mu_0 j_2}{2} (y\vec{i} - x\vec{j}) = \\ &= \frac{\mu_0 j_2}{2} y\vec{i} - \frac{\mu_0}{2} (j_1 a + j_2 x) \vec{j} \end{aligned} \quad (10)$$

При плотностях токов (3), (4) магнитное поле равно нулю в точке с координатами

$$x_0 = -\frac{j_1}{j_2} a = -\frac{3,37 \cdot 10^4}{2,70 \cdot 10^5} 2,0 \text{ мм} = -0,25 \text{ мм} = -R_2$$

$$y_0 = 0$$

Итого, магнитная индукция в малом цилиндре равна

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 j_2}{2} y\vec{i} - \frac{\mu_0 j_2}{2} (x + R_2) \vec{j} = \frac{\mu_0 j_2}{2} (y\vec{i} - (x + R_2) \vec{j}) \quad (11)$$

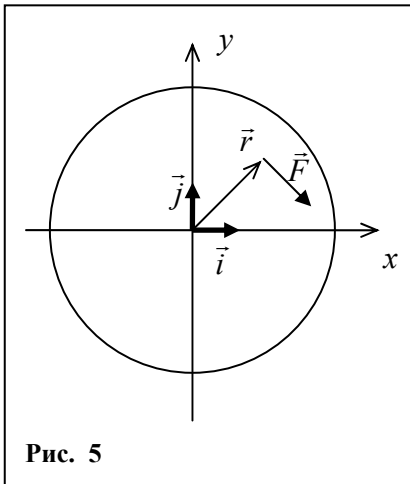


Рис. 5

Силовые линии такого поля представляют собой окружности с центром в точке $(-R_2; 0)$.

Дополнения.

1. Силовой линией называется такая кривая, касательная к которой в любой точке сонаправлена с полем. Очевидно, что если магнитная индукция перпендикулярна радиус-вектору в любой точке, то силовые линии такого поля – окружности (для любой точки окружности касательная перпендикулярна радиусу, проведенную в данную точку).

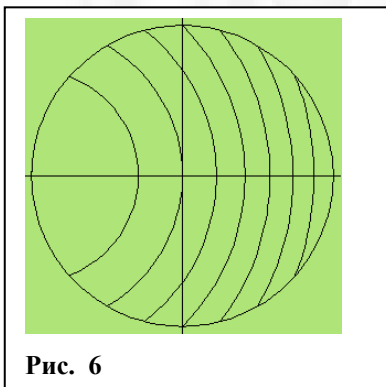


Рис. 6

Как раз такая ситуация будет в нашем случае, если начало координат перенести в точку $(-R_2; 0)$. Вид силовых линий изображен на рисунке 6.

Для более строгого доказательства рассмотрим векторное поле $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ (рис. 5). Получим уравнение силовых линий для данного поля.

В каждой точке силовой линии поле направлено по касательной к ней. Т.е. тангенс угла наклона силовой линии к оси абсцисс равен отношению y -компоненты поля к x -компоненте поля.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_y}{F_x} \tag{12}$$

Для удобства запоминания данное соотношение лучше записать в таком виде

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} \tag{13}$$

тем более, что уравнения силовой линии в трехмерном случае выглядят аналогично:

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z} \tag{14}$$

(Обратите внимание, здесь два уравнения, а не одно!)

В данном случае

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (15)$$

$$ydy = -xdx; \quad (16)$$

$$xdx + ydy = 0; \quad (17)$$

$$d\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) = 0; \quad (18)$$

$$x^2 + y^2 = C^2 \quad (19)$$

Это и есть семейство окружностей радиуса C .

2. Обратите внимание, насколько эти две задачи похожи!

Задача 1.3

Среднее электрическое поле \vec{E}_A внутри сферы найдем, как поле равномерно поляризованного диэлектрика \vec{E} за вычетом поля, создаваемого равномерно поляризованным шаром \vec{E}_S (рис.2).

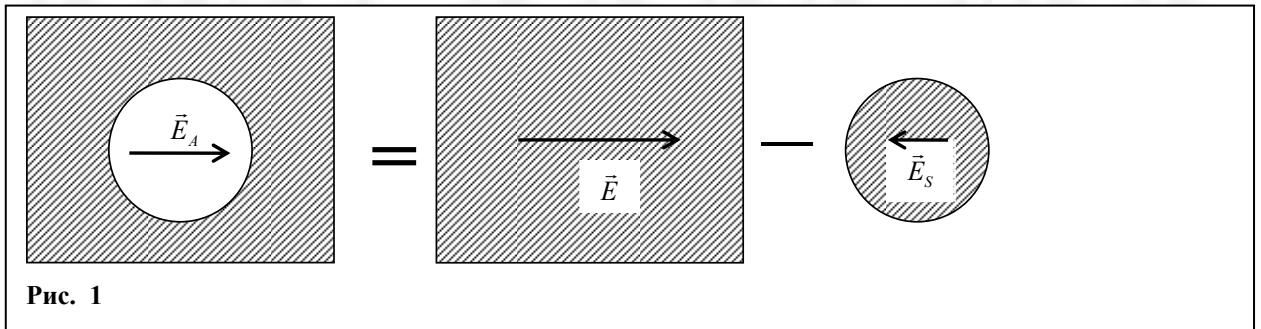


Рис. 1

Поле \vec{E}_S направлено противоположно \vec{E} — это видно из того, что

$$\vec{E}_S = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad (17) \text{ и } \vec{P} = (\epsilon - 1)\epsilon_0\vec{E} \quad (18)$$

то есть ($\epsilon > 1$)

$$\vec{E}_S = -\frac{(\epsilon - 1)\vec{E}}{3} \quad (19)$$

Интересующее нас поле

$$\vec{E}_A = \vec{E} - \vec{E}_S = \vec{E} - \left(-\frac{(\epsilon - 1)\vec{E}}{3}\right) = \left(1 + \frac{\epsilon - 1}{3}\right)\vec{E} = \frac{\epsilon + 2}{3}\vec{E} \quad (20)$$

Именно это поле воздействует на молекулы внутри сферы в нашей модели и индуцирует в них дипольный момент

$$\vec{p} = \beta\epsilon_0\vec{E}_A = \beta\epsilon_0\frac{\epsilon + 2}{3}\vec{E} \quad (21).$$

Очевидно, что поляризация (дипольный момент единицы объема вещества) равна дипольному моменту одной молекулы, умноженному на число молекул в единице объема, т.е. концентрацию молекул:

$$\vec{P} = n\vec{p} = n\beta\epsilon_0\frac{\epsilon + 2}{3}\vec{E} \quad (22)$$

Выражения (2) и (6) дают нам следующее равенство:

$$(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \vec{E} = n\beta\varepsilon_0 \frac{\varepsilon + 2}{3} \vec{E} \quad (23)$$

из которого определяем диэлектрическую проницаемость

$$\varepsilon = \frac{1 + n\beta \frac{2}{3}}{1 - \frac{n\beta}{3}} = \frac{3 + 2n\beta}{3 - n\beta} = \frac{3 - n\beta + 3n\beta}{3 - n\beta} = 1 + \frac{3n\beta}{3 - n\beta} \quad (24)$$

Дополнение.

Полученная формула, конечно, носит приближённый характер, что вытекает из принятых в задаче приближений. Первое из них – это рассмотрение точечных диполей, что не совсем верно для веществ, состоящих из сложных молекул. Но, в любом случае, такое приближение выглядит вполне приемлемо по сравнению с выбором именно сферической полости. Заметим, что для кристаллов с кубической решёткой данное приближение выполняется точно. Т.е., действительно, поле создаваемое диполями, находящимися внутри сферы, равно нулю в центре этой сферы (без учёта поля диполя, расположенного в центре). Но точно такая же ситуация будет реализовываться если выбрать полость кубической формы. Выбор именно сферы обоснован экспериментальным подтверждением полученной формулы для большинства газообразных и жидких диэлектриков. Например, для сероуглерода формула верна как для газообразного состояния, так и для жидкого, когда концентрация молекул возрастает в 380 раз.

Подчеркнём также, что полученная формула верна только для веществ состоящих из неполярных молекул. В веществах, состоящих из полярных молекул, влияние соседних молекул существенно и приведённый выше подход оказывается верным только для очень разреженных газов.

Задание 11.2 “Масс-спектрометры”

Часть 1. Постоянное поле.

1.1 Время движения иона от источника до коллектора равно

$$T = \sqrt{\frac{2S}{a}} + \frac{L}{v} \quad (1),$$

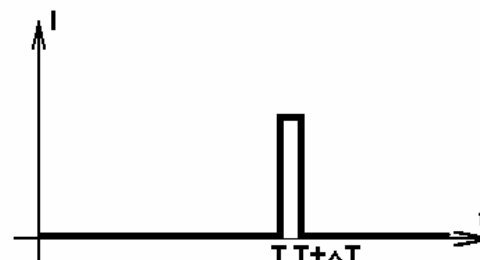
где $a = \frac{Ue}{Sm}$ - ускорение иона в промежутке S , а

$v = \sqrt{\frac{2Ue}{m}}$ - скорость, которую приобретает ион, пройдя

разность потенциалов U .

Подставляя, эти значения в формулу (1) получим

$$T = S\sqrt{\frac{2m}{Ue}} + L\sqrt{\frac{m}{2Ue}} \quad (2)$$



Длительность регистрации равна времени работы источника

$$\Delta T = \tau. \quad (3)$$

1.2 Предельный случай перекрытия импульсов реализуется в том случае, когда тяжёлый ион с массой $m + \delta m$ вылетает в момент $t = 0$, а лёгкий, с массой m , в момент $t = \tau$, и эти два иона одновременно достигают коллектора. Для удобства, запишем выражение для времени пролёта, полученное в пункте 1 в виде

$$T = \xi\sqrt{m}, \text{ где } \xi = S\sqrt{\frac{2}{Ue}} + L\sqrt{\frac{1}{2Ue}} \quad (4).$$

Тогда

$$\xi\sqrt{m + \delta m} = \xi\sqrt{m} + \tau \quad (5).$$

Считая δm малой величиной, запишем

$$\sqrt{m + \delta m} \approx \sqrt{m} \left(1 + \frac{\delta m}{2m} \right) = \sqrt{m} + \frac{\delta m}{2\sqrt{m}} \quad (5a).$$

Тогда

$$\xi \frac{\delta m}{2\sqrt{m}} = \tau \quad (6).$$

Откуда получаем

$$\delta m = \frac{2\tau}{\xi} \sqrt{m} = \alpha \sqrt{m} \quad (7).$$

1.3 Рассчитаем численное значение коэффициента пропорциональности

$$\alpha = \frac{2\tau}{\xi} = \frac{2\tau}{S\sqrt{\frac{2}{Ue}} + L\sqrt{\frac{1}{2Ue}}} \quad (8)$$

$$\xi = 3.25 \cdot 10^8 \text{ с} \cdot \text{кэ}^{-1/2} \quad (9)$$

$$\alpha = 6.15 \cdot 10^{-15} \text{ кэ}^{1/2} \quad (10)$$

Значение α для масс ионов, измеренных в а.е.м. равно

$$\alpha(a.e.m) = \frac{\alpha(\kappa z)}{\sqrt{1a.e.m.}} = 0,15 \quad (11).$$

1.4 Подставляя значение $m = 56a.e.m.$, получим $\delta m = 1.12a.e.m.$, что меньше чем $2a.e.m.$. Т.е. прибор сможет разрешить эти ионы.

Часть 2.Высокочастотное поле.

2.1 Скорость иона после прохождения ускоряющего промежутка равна

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}, \quad (12)$$

а его максимальное ускорение

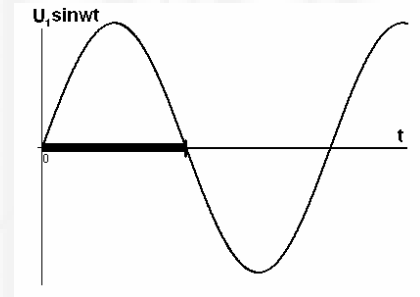
$$a_0 = \frac{eU_1}{hm} \quad (13).$$

Численное значение скорости для иона $^{56}Fe^+$ равно

$$v_0 = 5,9 \cdot 10^4 \frac{M}{c} \quad (14).$$

2.2 На первый взгляд, логично предположить, что максимальное приращение энергии ион получит, если реализуется случай изображённый на рисунке. Т.е. ион проходит промежуток ровно за половину периода колебаний поля, когда в промежутке существует ускоряющее поле.

$$\frac{h}{v_0} = \frac{\pi}{\omega} \quad (15).$$



Используя численное значение скорости, полученное в предыдущем пункте, получим

$$h \approx 2cm. \quad (16)$$

2.3 Пусть ион попадает в область переменного поля в некоторый момент времени τ . Считаем величины a_0 и v_0 известными, тогда зависимость ускорения иона от времени имеет вид

$$a(t) = a_0 \sin(\omega t + \omega \tau), \quad (17)$$

его скорость изменяется по закону

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a_0 \sin(\omega t + \omega \tau) dt = v_0 + \frac{a_0}{\omega} \cos \omega \tau - \frac{a_0}{\omega} \cos(\omega t + \omega \tau), \quad (18)$$

наконец, находим зависимость координаты от времени

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \left(v_0 + \frac{a_0}{\omega} \cos \omega \tau - \frac{a_0}{\omega} \cos(\omega t + \omega \tau) \right) dt = \\ &= \left(v_0 + \frac{a_0}{\omega} \cos \omega \tau \right) t - \frac{a_0}{\omega^2} \sin(\omega t + \omega \tau) + \frac{a_0}{\omega^2} \sin \omega \tau \end{aligned} \quad (19)$$

2.4 Если пренебречь изменением скорости, то время пролета иона через область переменного поля, равна

$$t_1 = \frac{h}{v_0} \quad (20).$$

Оценим погрешность этого выражения, подставив $t_1 + \delta t_1$ в выражение для координаты $x(t)$.
Получим следующее уравнение

$$h = \left(v_0 + \frac{a_0}{\omega} \cos \omega \tau \right) (t_1 + \delta t_1) + \frac{a_0}{\omega^2} \sin \omega \tau - \frac{a_0}{\omega^2} \sin(\omega t_1 + \omega \tau + \omega \delta t_1). \quad (21).$$

Переходя к безразмерным параметрам, получим

$$\frac{h\omega}{v_0} = \left(1 + \frac{a_0}{\omega v_0} \cos \omega \tau \right) (\omega t_1 + \omega \delta t_1) + \frac{a_0}{\omega v_0} (\sin \omega \tau - \sin(\omega t_1 + \omega \tau + \omega \delta t_1)) \quad (22).$$

Величина $\frac{a_0}{\omega v_0}$ того же порядка малости, что и $\frac{\delta t_1}{t_1}$, т.к. $\frac{a_0}{\omega v_0} = \frac{a_0 t_1}{\omega v_0 t_1} \approx \frac{\Delta v}{v} \approx \frac{\delta t_1}{t_1}$.

Поэтому в последнем синусе можно пренебречь величиной $\omega \delta t_1$ и произведение $\frac{a_0}{\omega v_0} \cdot \omega \delta t_1$ можно пренебречь. Преобразовав, получим

$$\omega \delta t_1 = -\frac{a_0}{v_0} \left(t_1 \cos \omega \tau + \frac{1}{\omega} (\sin \omega \tau - \sin(\omega t_1 + \omega \tau)) \right) \quad (23).$$

Для оценки положим, что $\cos \omega \tau = 1$ и $\sin \omega \tau - \sin(\omega t_1 + \omega \tau) \approx 2$.

Тогда:

$$|(\omega \delta t_1)_{\max}| = \frac{a_0}{v_0} \left(t_1 + \frac{2}{\omega} \right) \approx \frac{a_0}{v_0} t_1 \quad (24).$$

Относительная погрешность

$$\frac{\delta t_1}{t_1} \approx \frac{a_0}{v_0 \omega} = \frac{eU_1}{h\omega m v_0} = \left[\frac{m v_0^2}{2} = U_0 e, \quad \omega t_1 \approx \pi \right] \approx \frac{U_1}{6U_0} \approx 1.7 \cdot 10^{-4} \ll 1 \quad (25).$$

Т.о. время пролёта определяется только шириной промежутка и начальной скоростью иона.

2.5 Вычислим приращение энергии иона в переменном поле

$$\Delta E = m v_0 \Delta v \quad (26).$$

Величину Δv возьмём из решения пункта 2.3, подставив вместо t , значение $t_1 = \frac{h}{v_0}$.

$$\Delta E = m v_0 \frac{a_0}{\omega} (\cos \omega \tau - \cos(\omega t_1 + \omega \tau)) \quad (27).$$

Используя формулу для разности косинусов и подставляя значение t_1 , получим:

$$\Delta E(\omega, \tau) = 2 \frac{m v_0 a_0}{\omega} \sin\left(\frac{\omega h}{2 v_0}\right) \sin\left(\frac{\omega h}{2 v_0} + \omega \tau\right) \quad (28).$$

2.6 Запишем выражение для ΔE , используя безразмерную величину $\varphi = \omega \frac{h}{v_0}$

$$\Delta E = m a_0 h \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \omega \tau\right) \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\frac{\varphi}{2}} = U_1 e \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \omega \tau\right) \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\frac{\varphi}{2}} \quad (29).$$

Максимумы, в зависимости от φ будут наибольшими только для ионов попадающих в промежутки 2 в определённые моменты τ , когда

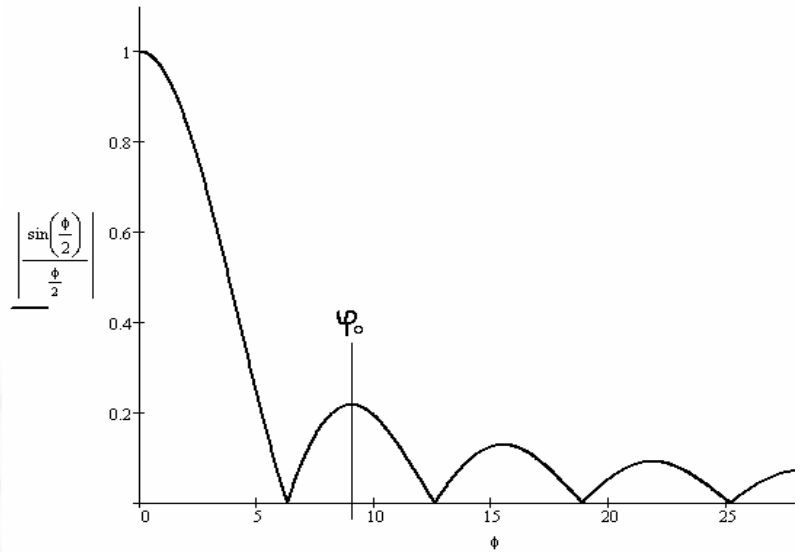
$$\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \omega \tau\right) = \pm 1 \quad (30),$$

в зависимости от того, какой знак имеет выражение $\frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\frac{\varphi}{2}}$.

Поэтому более корректным является рассмотрение модуля ΔE .

$$\Delta E_{\max}(\varphi) = U_1 e \left| \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\frac{\varphi}{2}} \right| \quad (31).$$

График этой функции изображён на рисунке.



2.7 Очевидно, что самый большой максимум, $\varphi = 0$, одинаков для всех ионов. Анализировать ионный состав потока можно вблизи остальных максимумов, положение которых зависит от массы ионов

($v_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}$). Наиболее эффективной будет работа в области первого максимума.

2.8 Для определения частоты ω_0 , необходимо исследовать функцию вида $y = \frac{\sin(x)}{x}$.

$y'(x) = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$. Т.е. нужно решить уравнение $x = \operatorname{tg}(x)$.

На рисунке видно, что решение этого уравнения $x \approx \frac{3}{2}\pi$. Большая точность пока не нужна.

Таким образом

$$\varphi_0 \approx 3\pi \quad (32),$$

$$\omega_0 \approx 3\pi \frac{h}{v_0} \quad (33).$$

Таким образом, предположение, выдвинутое в пункте 2.2, верно лишь по порядку величины. На самом деле за время пролёта иона должно пройти три половины периода изменения высокочастотного поля.

Чтобы ΔE было максимальным $\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \omega\tau\right)$ должен быть равным -1. Это значение реализуется при

$$\tau_0 \approx 0 \quad (34),$$

или, в более общем виде, $\tau_0 \approx 2\pi n$ $n \in Z$, причём, чем больше n , тем точнее.

При таких ω_0 и τ_0 максимальное приращение энергии

$$\Delta E_{\max} = eU_1 \frac{2}{3}\pi \quad (35).$$

2.9 Точный выбор запирающего напряжения существенен для нормальной работы спектрометра. Чтобы найти α , необходимо более точно решить уравнение $x = tg(x)$. Решение можно подобрать на калькуляторе за пару минут или решить методом последовательных итераций $x_{n+1} = arctg(x_n) + \pi$. Получим

$$x' \approx 4.493 \quad (36).$$

Тогда $\frac{\sin(x')}{x'} \approx -0.217$. Следовательно

$$\alpha = 0.217 \quad (37).$$

2.10 При уменьшении запирающего напряжения, на коллектор смогут попасть ионы для которых τ находится в некотором интервале $(\tau_0 - \Delta\tau, \tau_0 + \Delta\tau)$. Для этих ионов

$$\Delta E > eU_{30}(1 - \eta) \quad (38),$$

или

$$\left| U_1 \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\frac{\varphi}{2}} \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \omega\Delta\tau\right) \right| > \alpha U_1 (1 - \eta), \text{ где } \omega\Delta\tau \ll 1 \quad (39).$$

Вблизи максимума, как было установлено ранее

$$\frac{\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)}{\frac{\varphi_0}{2}} = -\alpha \quad (40).$$

$$\text{А } \sin\left(\frac{\varphi_0}{2} + \omega\Delta\tau\right) = \sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\cos(\omega\Delta\tau) - \cos\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\sin(\omega\Delta\tau) = -\cos(\omega\Delta\tau) \quad (41).$$

В выше указанном преобразовании принято, что $\varphi_0 = 3\pi$, $\tau_0 = 0$.

Заметим, что аналогичное преобразование верно и для точных значений φ_0 и τ_0 .

$$\sin\left(\frac{\varphi_0}{2} + \omega\tau_0 + \omega\Delta\tau\right) = \sin\left(\frac{\varphi_0}{2} + \omega\tau_0\right)\cos(\omega\Delta\tau_0) + \cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \omega\tau_0\right)\sin(\omega\Delta\tau) = -\cos(\omega\Delta\tau)$$

Разложив косинус в ряд, получим следующее неравенство:

$$1 - \frac{(\omega\Delta\tau)^2}{2} > 1 - \eta \quad (42).$$

$$\Delta\tau < \frac{\sqrt{2\eta}}{\omega} \quad (43).$$

Значение тока

$$I = I_0 \frac{2\Delta\tau}{2\pi/\omega} = I_0 \frac{\sqrt{2\eta}}{\pi} \quad (44).$$

2.11 В этом пункте, наоборот, $\sin\left(\frac{\varphi_0}{2} + \omega\tau_0\right) = -1$ и, предположив, что $\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$, необходимо решить неравенство:

$$\left| \frac{\sin\left(\frac{\varphi_0 + \Delta\varphi}{2}\right)}{\frac{\varphi_0 + \Delta\varphi}{2}} \right| > \alpha(1-\eta) \quad (45).$$

$$\frac{\sin\left(\frac{\varphi_0 + \Delta\varphi}{2}\right)}{\frac{\varphi_0 + \Delta\varphi}{2}} \approx -\alpha \cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \quad (46).$$

Разложив косинус в ряд, получим:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^2 < \eta \quad (47).$$

Максимальное значение $\Delta\varphi = 2\sqrt{2\eta}$ (48)

Максимальное значение $\Delta\omega = 2\sqrt{2\eta} \frac{v_0}{h}$ (49)

Опять таки, выше принято, что $\varphi_0 = 3\pi$.

Но преобразования верны и для точного значения φ_0 . Предлагаем рассмотреть

преобразования подробнее. Обозначим $x = \frac{\varphi_0 + \Delta\varphi}{2}$. Разложим $\frac{\sin(x)}{x}$ в ряд вблизи точки экстремума.

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2} = 0. \quad \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)'' = -\frac{\sin(x)}{x} - \frac{2 \cos(x)}{x^2} + \frac{2 \sin(x)}{x^3}$$

$\cos(x) = \frac{\sin(x)}{\operatorname{tg}(x)} = \frac{\sin(x)}{x}$, т.к. в точке экстремума $x = \operatorname{tg}(x)$. Тогда $\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)'' = -\frac{\sin(x)}{x} = \alpha$.

В итоге получим:

$$\frac{\sin(x)}{x} = -\alpha + \frac{\alpha}{2}(\Delta x)^2, \quad \frac{\sin\left(\frac{\varphi_0 + \Delta\varphi}{2}\right)}{\frac{\varphi_0 + \Delta\varphi}{2}} = -\alpha \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^2\right), \text{ что приводит к тому же ответу.}$$

2.12 Значение частоты, полученное в пункте 2.8: $\omega_0 \approx 3\pi \frac{h}{v_0}$, т.е. частота пропорциональна корню от массы ионов,

$$\omega_0 \sim \sqrt{m} \quad (50).$$

$$\sqrt{m + \delta m} \approx \sqrt{m} \left(1 + \frac{\delta m}{2m}\right) \quad (51).$$

$$\frac{\omega_0 + \Delta\omega}{\omega_0} = 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\sqrt{m + \delta m}}{\sqrt{m}} = 1 + \frac{\delta m}{2m} \quad (52).$$

Откуда получаем:

$$\frac{\delta m}{m} = 2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 2 \frac{2\sqrt{2\eta}}{3\pi} = \frac{4\sqrt{2\eta}}{3\pi} \quad (53).$$

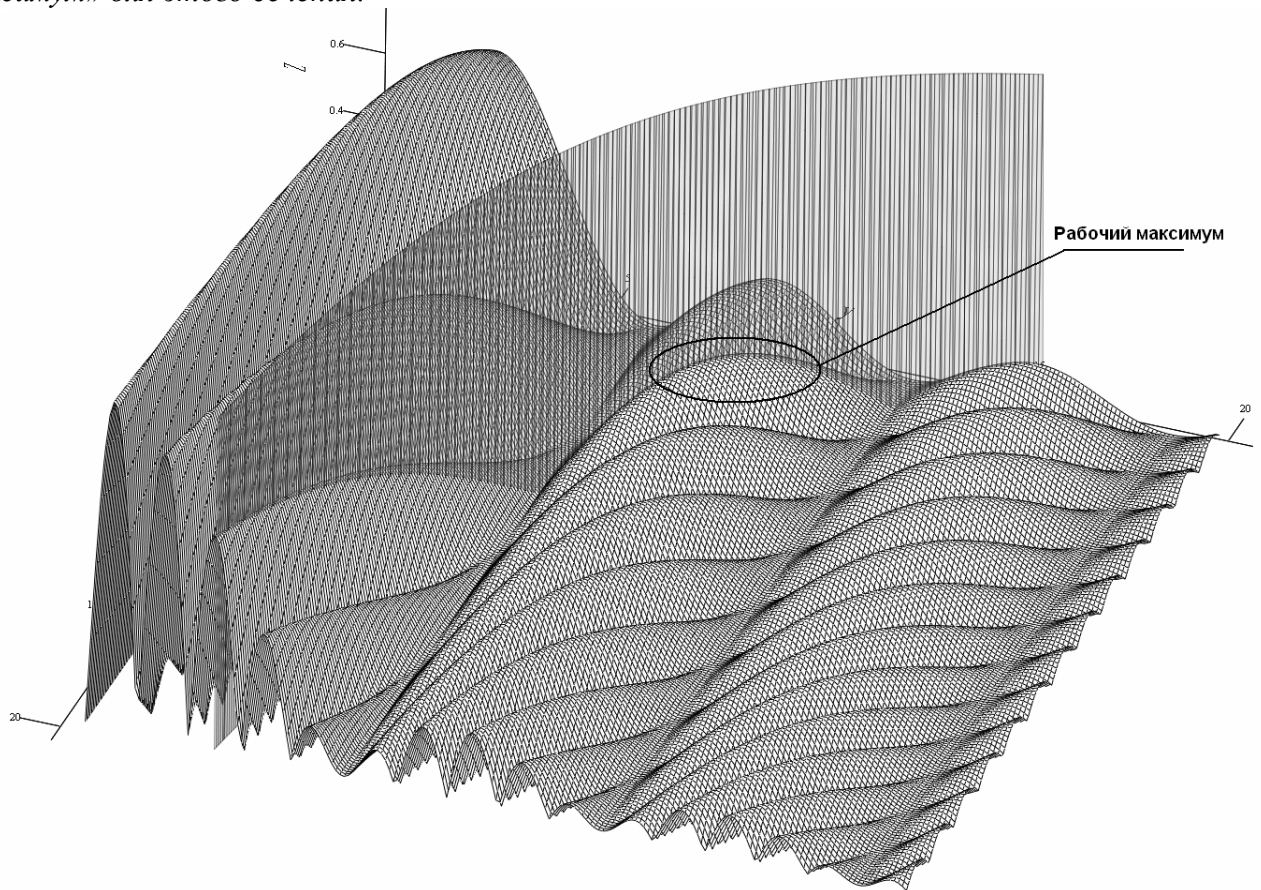
К примеру, для $\eta = 0.01$ $\frac{\delta m}{m} = 0.06$.

Дополнение.

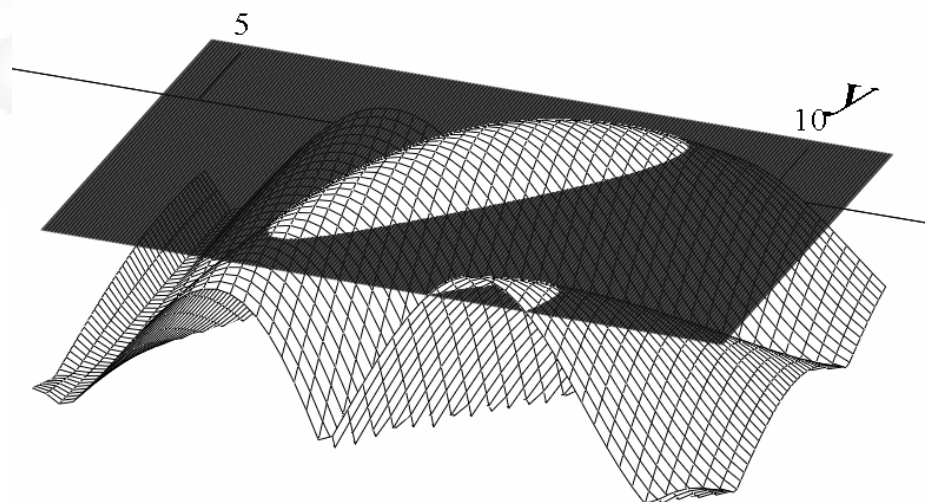
В качестве дополнения к решению задачи, попытаемся изобразить трёхмерный график

функции $Z(\varphi, \tau) = \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \omega\tau\right) \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\frac{\varphi}{2}}$. Для наглядности положим $\omega = 0.1\varphi$.

На рисунке приведён график этой зависимости, по оси OX отложены значения τ , по оси OY - значения φ . Также на графике показано сечение $\frac{\varphi}{2} + 0.1\varphi\tau = \frac{5}{2}\pi$ и выделен «рабочий максимум» для этого сечения.

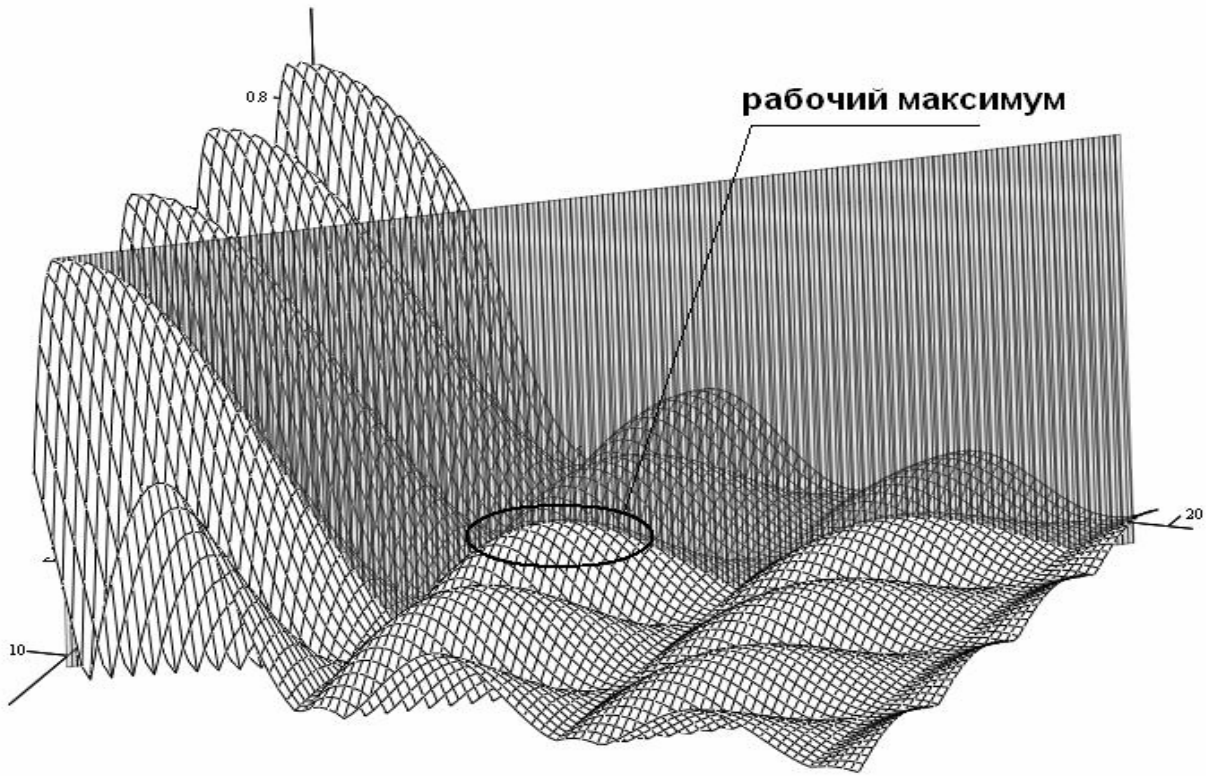


Рассмотрим более подробно область с «рабочим максимумом». Хорошо видно, что, уменьшая запирающее напряжение, мы увеличиваем ток при заданной частоте (ширина «холма» в направлении OX), и одновременно уменьшаем разрешающую способность прибора (ширина «холма» в направлении OY).



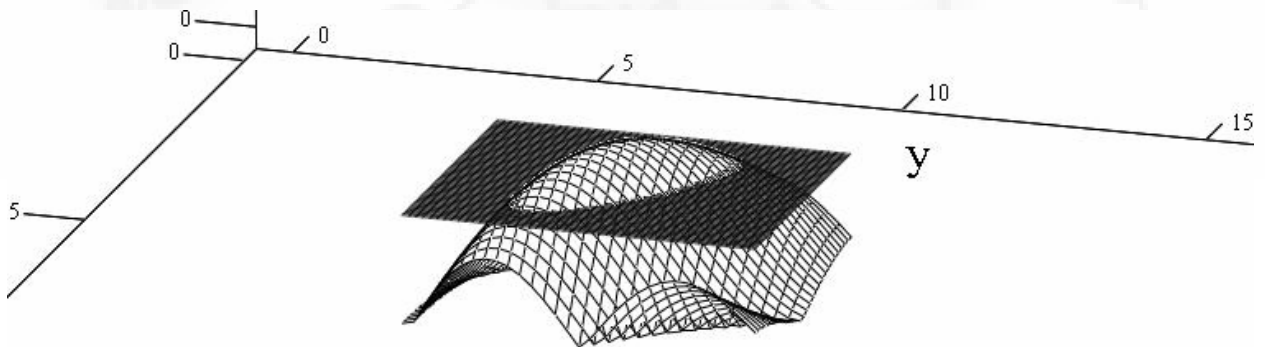
Можно немного упростить графическое изображение данной зависимости, проведя следующие рассуждения. «Время прихода» τ является независимой величиной, но мы также можем сделать независимой величиной $\omega\tau$, придав этому выражению смысл «фазы прихода»

($\varphi_0 = \omega\tau$). Изобразим график зависимости $Z(\varphi, \varphi_0) = \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \varphi_0\right) \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\frac{\varphi}{2}}$.



В этом случае сечением будет являться плоскость (на графике: $\frac{\varphi}{2} + \varphi_0 = \frac{7}{2}\pi$). Приведём также увеличенный «рабочий максимум». Заметим, что, как и в первом, так и во втором

случае в сечении получается уже исследованная ранее функция $\frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}}$.



Задание 11-3 «Гиперboloид инженера Гарина»

1.1 Понятно, что отношение числа поглощенных к числу падающих фотонов будет равно отношению суммарной площади сечения всех молекул в слое к площади поперечного сечения падающего потока, поэтому

$$\frac{\Delta I}{I_0} = \frac{I_0 - I}{I_0} = \frac{\sigma \gamma \Delta x S}{S} = \sigma \gamma \Delta x. \quad (1)$$

Отсюда следует, что интенсивность потока на выходе

$$I = I_0 (1 - \sigma \gamma \Delta x) \quad (2)$$

1.2 Среднюю длину пробега фотонов можно оценить, разделив начальную плотность потока на «скорость» его изменения в начале слоя

$$\langle l \rangle = \frac{I_0}{\left(\frac{\Delta I}{\Delta x} \right)_{x=0}} = \frac{1}{\gamma \sigma}. \quad (3)$$

1.3 Оценка среднего времени жизни молекулы в возбужденном состоянии проводится аналогично

$$\langle \tau \rangle = \frac{N_0}{\left(\frac{\Delta N}{\Delta t} \right)_{t=0}} = \frac{1}{A} \quad (4)$$

1.4 Если плотность падающего потока велика, то под его действием заметная часть молекул перейдут в возбужденное состояние и не будут участвовать в поглощение света (этот эффект называется насыщением поглощения). Обозначим число молекул (в некотором объеме) в возбужденном состоянии N_1 , а в основном N_0 . Их сумма остается постоянной и равной общему числу молекул в рассматриваемом объеме $N = N_0 + N_1$. Для определения числа молекул в возбужденном состоянии (в стационарном режиме) следует воспользоваться уравнением баланса: например, для возбужденных молекул – число молекул, переходящих в единицу времени из основного состояния в возбужденное под действием падающего потока равно числу молекул возвращающихся вследствие спонтанного и вынужденного испускания. Для составления подобных уравнений необходимо получить выражение для числа переходов из одного состояния в другое за некоторый малый промежуток времени.

Мысленно выделим тонкий слой, перпендикулярный направлению падающего потока, толщиной Δx и площадью S . Пусть в этом слое содержится N_0 молекул, находящихся в основном состоянии. За малый промежуток времени Δt на слой попадает $n = I_0 S \Delta t$ фотонов. Из них поглотится

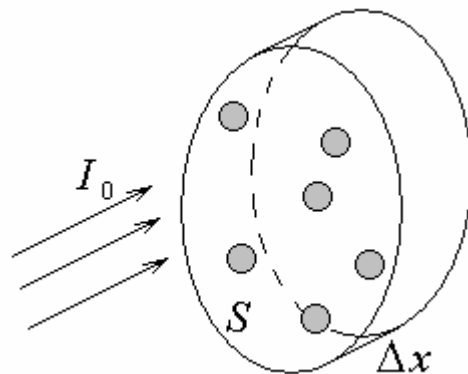
$$\Delta n = n \frac{N_0 \sigma}{S} = I_0 S \Delta t \frac{N_0 \sigma}{S} = I_0 N_0 \sigma \Delta t. \quad (5)$$

Столько же молекул переходят в возбужденное состояние.

Аналогичные рассуждения применимы и для процессов вынужденного испускания. На основании полученного соотношения можно теперь записать необходимое уравнение баланса числа частиц в возбужденном состоянии

$$N_0 I_0 \sigma \Delta t = N_1 I_0 \sigma \Delta t + A N_1 \Delta t. \quad (6)$$

Учитывая, что $N_0 = N - N_1$, из уравнения (6) определим число частиц в возбужденном

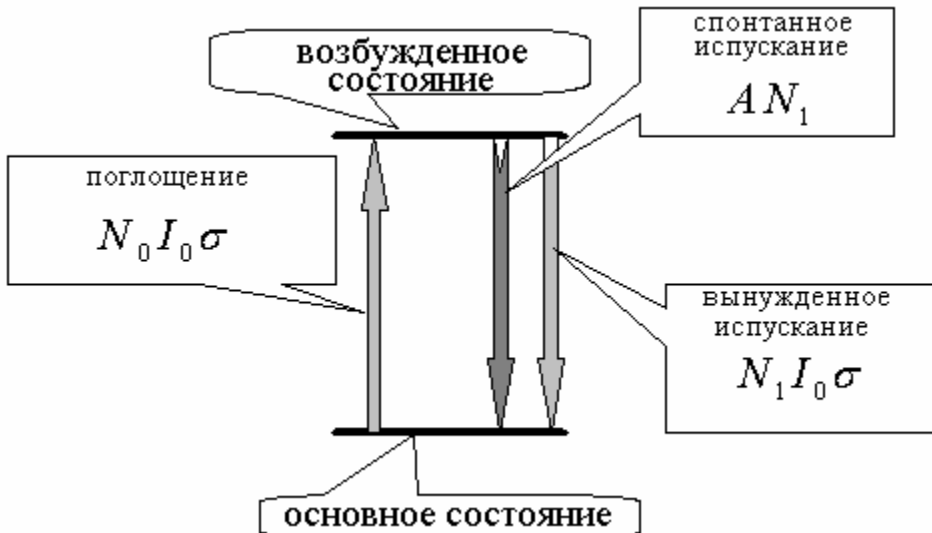


$$N_1 = N \frac{I_0 \sigma}{2I_0 \sigma + A} \quad (7)$$

и основном состоянии

$$N_0 = N - N_1 = N \frac{I_0 \sigma + A}{2I_0 \sigma + A}. \quad (8)$$

Возможные переходы между состояниями и их скорости (число переходов в единицу времени) показаны на диаграмме, иллюстрирующей уравнение баланса (6)).



Отметим, что при неограниченном возрастании плотности падающего потока числа частиц в основном и возбужденном состоянии выравниваются, то есть стремятся к $\frac{N}{2}$.

Соотношения, аналогичные (7) (8) можно записать и для концентрации частиц в основном γ_0 и возбужденном γ_1 состояниях

$$\gamma_0 = \gamma \frac{I_0 \sigma + A}{2I_0 \sigma + A}, \quad \gamma_1 = \gamma \frac{I_0 \sigma}{2I_0 \sigma + A}. \quad (9)$$

Для расчета пропускания необходимо учесть, что фотоны, испущенные вынужденно, неотличимы от фотонов падающего потока. Поэтому число фотонов на выходе из рассматриваемого слоя равно числу падающих фотонов минус число поглощенных фотонов плюс число фотонов, испущенных вынужденно, поэтому

$$I = I_0 - I_0 \gamma_0 \sigma + I_0 \gamma_1 \sigma.$$

Окончательно, коэффициент пропускания равен

$$p = 1 - \gamma_0 \sigma \Delta x + \gamma_1 \sigma \Delta x = 1 - \sigma \left(\gamma \frac{I_0 \sigma + A}{2I_0 \sigma + A} - \frac{I_0 \sigma}{2I_0 \sigma + A} \right) \Delta x = 1 - \sigma \gamma \frac{A}{2I_0 \sigma + A} \Delta x. \quad (10)$$

Часть 2. Резонатор.

2.1 Пусть от правого зеркала начинает распространяться поток фотонов плотности I_0 . Через время, равное времени пролета фотона через резонатор (в двух направлениях) $\tau = \frac{2L}{c}$, где c -

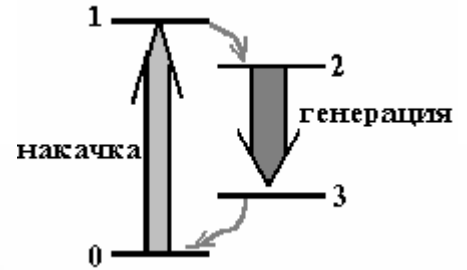
скорость света, эти фотоны попадут на частично проницаемое зеркало и часть из них, которая определяется пропусканием зеркала, покинут резонатор. Таким образом, уменьшение плотности потока фотонов в резонаторе за этот промежуток времени составит $\Delta I = I_0(1 - \rho)$.

Среднее время исчезновения фотонов определяется по уже использованной методике

$$\langle t \rangle = \frac{I_0}{(\Delta I / \Delta t)_0} = \frac{I_0 \tau}{(\Delta I)_0} = \frac{\tau}{1 - \rho} = \frac{2L}{c(1 - \rho)}. \quad (11)$$

Часть 3. Лазер.

Излучение накачки приводит к тому, что часть молекул оказывается в промежуточном состоянии 2. Так как в состоянии 3 молекул практически нет, то излучение, энергия фотонов которого равна разности энергий уровней 2 и 3, при прохождении через активную среду может усиливаться. Действительно, это излучение будет приводить к вынужденному испусканию фотонов, а их поглощение будет отсутствовать, так как в нижнем состоянии 3 молекул нет. (Говорят, что для перехода 2-3 осуществляется инверсная заселенность). Очевидно, что усиление будет наиболее существенно для фотонов распространяющихся вдоль оси резонатора в обоих направлениях, поэтому именно для этого потока выполняются условия генерации. Допустим, что это излучение присутствует в резонаторе, обозначим плотность его потока в одном направлении I_{Γ} . Строго говоря, плотности потоков различны для различных направлений распространения. Однако, из-за малой концентрации активных частиц при расчете числа возбужденных молекул этим различием можно пренебречь. Это различие существенно при записи условий стационарности генерации, что будет учтено нами позднее.



Под действием излучения накачки часть молекул переходит в возбужденное состояние 1, а затем быстро «сваливается» в промежуточное состояние 2. покинуть это состояние молекулы могут двумя способами: посредством спонтанного перехода в низлежащие состояния или посредством вынужденного испускания стимулированного излучением генерации. Если молекула оказывается в состоянии 3, то она также практически мгновенно оказывается в основном состоянии 0. Из-за быстрых переходов $1 \rightarrow 2$ и $3 \rightarrow 0$ при расчете концентраций молекул мы можем пренебречь числом молекул в промежуточных состояниях 1 и 3. Уравнение баланса числа частиц (или их концентрации) в состоянии 2 будет иметь вид

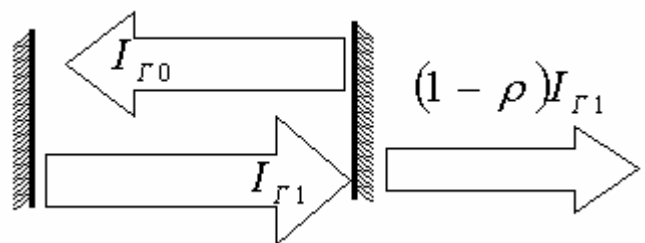
$$I_0(\gamma - \gamma_2)\sigma_0 \Delta t = A\gamma_2 \Delta t + 2I_{\Gamma}\sigma_1\gamma_2 \Delta t \quad (12)$$

где $\gamma - \gamma_2 = \gamma_0$ - концентрация частиц в основном состоянии. В последнем слагаемом учтено наличие потоков генерации в двух направлениях. Перепишем это уравнение в виде

$$I_0\gamma\sigma_0 = \gamma_2(I_0\sigma_0 + A\Delta t + 2I_{\Gamma}\sigma_1). \quad (13)$$

Получим теперь условия стационарности потока генерации. Для этого обозначим плотность потока генерации «стартующего» от правого (частично прозрачного зеркала) $I_{\Gamma 0}$. Дважды пройдя через резонатор, это излучение усилится, и его плотность потока станет равной

$$I_{\Gamma 1} = I_{\Gamma 0}(1 + 2\gamma_2\sigma_1 L)$$



$$(14)$$

Отразившись от зеркала, эта плотность потока уменьшится и в стационарном режиме станет равной исходной плотности $I_{\Gamma 0}$. Следовательно, искомое условие стационарности примет вид

$$I_{\Gamma 1}\rho = I_{\Gamma 0}(1 + 2\gamma_2\sigma_1 L)\rho = I_{\Gamma 0}. \quad (15)$$

Малое отличие коэффициента отражения от единицы и малость концентрации числа активных молекул оправдывают приближение постоянства плотности потока генерации при его распространении в обоих направления.

Из уравнения (15) следует, что концентрация числа молекул в состоянии 2 равна

$$\gamma_2 = \frac{1-\rho}{\rho} \cdot \frac{1}{2\sigma_1 L}. \quad (16)$$

Подставляя это значение в уравнение (13) получим выражение

$$I_0 \gamma \sigma_0 = \frac{1-\rho}{\rho} \cdot \frac{1}{2\sigma_1 L} (I_0 \sigma_0 + A \Delta t + 2I_r \sigma_1), \quad (17)$$

из которого определим плотность потока генерации внутри резонатора:

$$I_r = \frac{1}{2\sigma_1} \left(I_0 \sigma_0 \left(\frac{2\sigma_1 L \rho}{1-\rho} \gamma - 1 \right) - A \right). \quad (18)$$

Для того, чтобы процесс генерации реализовывался, это выражение должно быть больше нуля, откуда определяем пороговое значение интенсивности накачки

$$I_r = \frac{1}{2\sigma_1} \left(I_0 \sigma_0 \left(\frac{2\sigma_1 L \rho}{1-\rho} \gamma - 1 \right) - A \right) \geq 0 \Rightarrow I_{0пор} = \frac{A}{\sigma_0 \left(\frac{2\sigma_1 L \rho}{1-\rho} \gamma - 1 \right)} \quad (19)$$

Формула (18) определяет плотность потока генерации внутри резонатора, чтобы получить ее значение на выходе из резонатора ее следует умножить на коэффициент пропускания зеркала $(1-\rho)$. Кроме того, для удобства построения графика ее можно представить в виде

$$I_{\Gamma_{вых}} = (1-\rho) \frac{A}{2\sigma_1} \left(\frac{I_0}{I_{0пор}} - 1 \right). \quad (20)$$

Схематический график этой функции показан на рисунке.

