

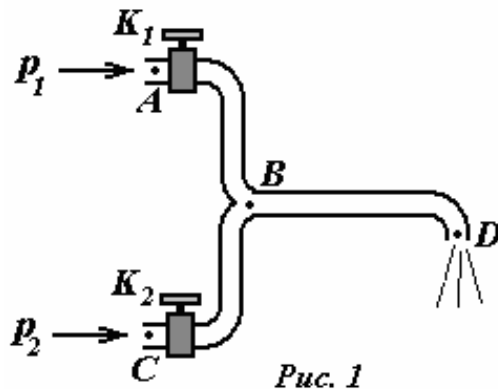
Условие

Задание 9.3 «Смеситель»

Водопроводный смеситель холодной ($T_1 = 10^\circ\text{C}$) и горячей ($T_2 = 70^\circ\text{C}$) воды состоит из двух одинаковых труб AB и CB , переходящих в удлинитель BD (рис.1). Краны K_1 и K_2 регулируют расход q (т.е. объем воды, проходящий через трубу в единицу времени) и температуру T воды, выходящей из смесителя.

Опыт показывает, что расход воды через трубу AB (или CB) пропорционален разности гидростатических давлений p_A и p_B на ее концах $q = \alpha C(p_A - p_B)$, где α — некоторый безразмерный коэффициент «открытия крана», принимающий значение от нуля (кран закрыт) до единицы (кран полностью открыт), а C — некоторый постоянный размерный коэффициент для данной трубы.

Расход воды через удлинитель BD также пропорционален разности давлений жидкости на его концах $q = C(p_B - p_0)$, где p_0 — нормальное атмосферное давление на выходе из трубы в точке D (см. рис. 1).



Давления в магистралях холодной $p_1 = p_A = 3,0$ атм и горячей $p_2 = p_B = 2,6$ атм труб поддерживаются постоянными. Воду будем считать несжимаемой жидкостью, а потери теплоты при прохождении смесителя — пренебрежимо малыми.

Если полностью открыть ($\alpha_1 = 1,0$) кран холодной воды при полностью закрытом кране горячей воды, то расход воды будет равен $q_1 = 1,4 \frac{\text{л}}{\text{с}}$.

3.1 Вычислите значение коэффициента C и укажите его размерность.

3.2 Найдите расход q_2 воды при полном открытии крана с горячей водой (при закрытом втором кране).

3.3 Вычислите расход воды q_3 и ее температуру T_3 в случае, когда два крана открыты полностью ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1,0$).

3.4 Найдите расход воды q_4 и ее температуру T_4 в случае, когда один кран холодной воды открыт на $\alpha_1 = 0,30$, а кран горячей — на $\alpha_2 = 0,70$.

3.5 В «час пик» при большом количестве пользователей давление p_2 в магистрали горячей воды может значительно упасть. При каком давлении $p_{2\min}$ подача горячей воды в смеситель полностью прекратится, если кран холодной воды открыт на $\alpha_1 = 0,30$, а кран горячей — на $\alpha_2 = 0,70$?

Решение

Задание 9.3 «Смеситель»

3.1 Для вычисления значения C рассмотрим процесс вытекания холодной воды при полностью открытом кране. При течении несжимаемой жидкости ее расход для обеих трубок должен быть один и тот же

$$q_{AB} = q_{BD}$$

Это будет возможно в том случае, если в точке B (рис. 1) трубки установится некоторое «самосогласованное» давление p_B , обеспечивающее прокачку соответствующего потока жидкости через каждую из трубок. Математически можем записать это условие в виде системы уравнений

$$q_{AB} = C(p_1 - p_B) = q_{BD} = C(p_B - p_0). \quad (1)$$

Из этого уравнения находим

$$p_B = \frac{p_1 + p_0}{2} = 2,0 \text{ атм.}$$

Соответственно, для расхода воды в этом случае получим

$$q_{AB} = C \frac{p_1 - p_0}{2} \Rightarrow C = \frac{2q_1}{p_1 - p_0} \quad (2)$$

Расчет по формуле (2) дает численное значение постоянной C

$$C = 1,4 \frac{\text{л}}{\text{с} \cdot \text{атм}} = 1,4 \cdot 10^{-8} \frac{\text{м}^3}{\text{с} \cdot \text{Па}}.$$

3.2 При полном открытии крана с горячей водой можно повторить рассуждения предыдущего пункта с той лишь разницей, что давление в магистрали равно p_2 , поэтому

$$q_2 = C \frac{p_2 - p_0}{2} = \frac{p_2 - p_0}{p_1 - p_0} q_1 = 1,1 \frac{\text{л}}{\text{с}}.$$

3.3 При полном открытии двух кранов в точке B системы должно установиться давление p_B , «обеспечивающее» прокачку через удлинитель BD суммарного потока q_3 , образованного слиянием двух (холодного q_1 и горячего q_2) потоков из труб AB и CB . Соответственно, в этом случае справедлива система уравнений

$$\begin{aligned}
q_1 &= C(p_1 - p_B) \\
q_2 &= C(p_2 - p_B) \\
q_3 &= q_1 + q_2 = C(p_B - p_0)
\end{aligned}
\tag{3}$$

Решение системы (3) дает следующие результаты

$$\begin{aligned}
p_B &= \frac{p_1 + p_2 + p_0}{3}, \\
q_1 &= C \frac{2p_1 - p_2 - p_0}{3} = 1,1 \frac{\text{л}}{\text{с}} \\
q_2 &= C \frac{2p_2 - p_1 - p_0}{3} = 0,6 \frac{\text{л}}{\text{с}} \\
q_3 &= q_1 + q_2 = C \frac{p_1 + p_2 - 2p_0}{3} = 1,7 \frac{\text{л}}{\text{с}}
\end{aligned}
\tag{4}$$

Как видим из (4), расход горячей воды почти в два раза меньше расхода холодной, что объясняется бóльшим давлением в магистрали холодной воды. Это приводит к своеобразному эффекту «закупоривания» трубы с горячей водой и, соответственно, падению ее расхода. С этой точки зрения можем заметить, что сильный перепад давлений в магистралях крайне нежелателен.

Поскольку в смесителе потери теплоты практически отсутствуют (жидкости протекают через него достаточно быстро), то уравнение теплового баланса будет иметь вид

$$cm_1(T - T_1) = cm_2(T_2 - T), \tag{5}$$

где T — искомая температура воды на выходе из смесителя, c — удельная теплоемкость воды. Т.к. вода практически несжимаема, то можно считать, что ее плотность ρ в обеих магистралях одинакова. В этом случае $m_1 = \rho V = \rho q_1 t$ и $m_2 = \rho V = \rho q_2 t$, и из уравнения (5) получаем искомый результат

$$T_3 = \frac{q_1 T_1 + q_2 T_2}{q_1 + q_2} = 30^\circ \text{C}. \tag{6}$$

3.4 При различном открывании кранов система уравнений примет вид

$$\begin{aligned}
q_1 &= \alpha_1 C(p_1 - p_B) \\
q_2 &= \alpha_2 C(p_2 - p_B) \\
q &= q_1 + q_2 = C(p_B - p_0)
\end{aligned}$$

Соответственно ее решение также несколько изменится

$$p_B = \frac{\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + p_0}{1 + \alpha_1 + \alpha_2}$$

$$\begin{aligned}
q_1 &= \alpha_1 C \frac{p_1(1 + \alpha_2) - \alpha_2 p_2 - p_0}{1 + \alpha_1 + \alpha_2} = 0,48 \text{ л/с} \\
q_2 &= \alpha_2 C \frac{p_2(1 + \alpha_1) - \alpha_1 p_1 - p_0}{1 + \alpha_1 + \alpha_2} = 0,73 \text{ л/с} \\
q_4 &= q_1 + q_2 = C \frac{\alpha_1(p_1 - p_0) + \alpha_2(p_2 - p_0)}{1 + \alpha_1 + \alpha_2} = 1,2 \text{ л/с}
\end{aligned} \tag{7}$$

Температуру воды на выходе из смесителя найдем с помощью выражения, аналогичного (6)

$$T_4 = \frac{q_1 T_1 + q_2 T_2}{q_1 + q_2} = 45^\circ \text{C}.$$

Если в качестве предельного перехода в выражениях (7) положить $\alpha_1 = \alpha_2 = 1,0$, то, как и следовало ожидать, получится система решений (4).

Таким образом, с помощью кранов мы можем регулировать температуру воды от полностью холодной ($T_1 = 10^\circ \text{C}$, $\alpha_1 = 1,0$, $\alpha_2 = 0,0$), до полностью горячей ($T_2 = 70^\circ \text{C}$, $\alpha_1 = 0,0$, $\alpha_2 = 1,0$).

3.5 Интересно, что как следует из (7), при некоторых давлениях p_1 и p_2 в магистралях и коэффициентах α_1 и α_2 поток горячей воды может обратиться в нуль. При этом в кран горячей воды будет «закачиваться» холодная, поскольку давление там меньше. Так иногда принимая душ, можно почувствовать, что вода стала прохладнее после того, как в соседней кабинке кто-то откроет кран с горячей водой. Для вычисления $p_{\min}$ приравняем нулю выражение для q_2 из (7)

$$q_2 = \alpha_2 C \frac{p_2(1 + \alpha_1) - \alpha_1 p_1 - p_0}{1 + \alpha_1 + \alpha_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_2(1 + \alpha_1) - \alpha_1 p_1 - p_0 = 0 \tag{8}$$

Из равенства (8) найдем величину $p_{\min}$, при которой вода в кране станет полностью холодной даже при открытом кране с горячей водой

$$p_{2\min} = \frac{\alpha_1 p_1 + p_0}{1 + \alpha_1} = 1,5 \text{ атм.} \tag{9}$$

Как следует из (9), эффект «обратной тяги» не зависит от коэффициента α_2 открытия крана с горячей водой. Это вполне можно понять, поскольку независимо от размера отверстия, сплошная среда (жидкость или газ) всегда устремляется в область пониженного давления.

