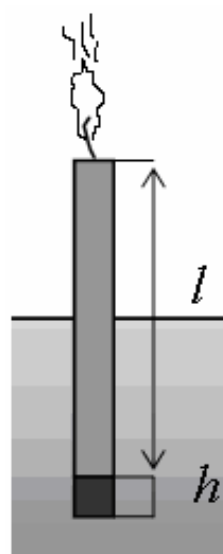


Условие

Задание 1. «Разминка»



Данное задание состоит из трех не связанных между собой задач.

Задача 1.1

Парафиновую (плотностью $\rho = 0,80 \text{ г/см}^3$) цилиндрическую свечу площадью основания $s = 1,0 \text{ см}^2$ опускают в ванну с водой (плотностью $\rho_0 = 1,0 \text{ г/см}^3$). Для придания свече устойчивости, к её нижнему основанию приклеили алюминиевую (плотностью $\rho_1 = 2,7 \text{ г/см}^3$) шайбу высотой $h = 1,0 \text{ см}$ и такой же, как и у свечи площади поперечного сечения $s = 1,0 \text{ см}^2$.

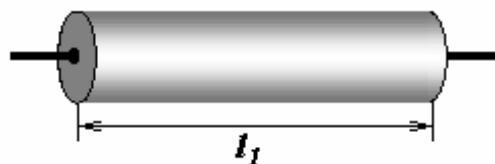
1.1.1 Найдите, при какой длине свечи l она сможет устойчиво плавать в воде.

1.1.2 Плавающую свечу длины $l = 13,0 \text{ см}$ с прикрепленной к ней алюминиевой шайбой подожгли, так что она стала сгорать со скоростью $u = 3,0 \text{ мм/мин}$. Через какое время свеча потухнет?

Задача 1.2

Цилиндрический проводник радиуса $r_1 = 2,0 \text{ мм}$ и длиной $l_1 = 50 \text{ см}$ (Рис. 1) при подключении к некоторому источнику постоянного напряжения нагрелся до максимальной температуры $t_1 = 57^\circ\text{C}$.

До какой максимальной температуры t_2 нагреется этот же проводник, если его равномерно растянуть до длины $l_2 = 1,0 \text{ м}$? Известно, что мощность охлаждения $P_{\text{охл}}$ прямо пропорциональна разности



температур проводника t_i и окружающей среды $t_0 = 0,0^\circ\text{C}$, а также площади поверхности проводника S :

$$P_{\text{охл}} = \alpha(t_i - t_0)S,$$

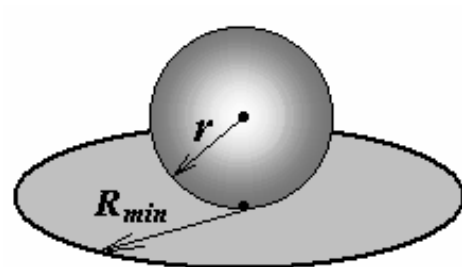
где α — некоторый постоянный для данного вещества коэффициент теплоотдачи.

Считайте, что при растяжении проводника его объем и удельное электрическое сопротивление не изменились.

Задача 1.3

На круглом плоском зеркале лежит глобус радиуса $r = 20$ см, касаясь центра зеркала южным полюсом. Найдите минимальный радиус R_{min} зеркала, при котором в нем можно увидеть отражение любой точки южного полушария и части северного полушария до широты Гродно $\varphi = 55^\circ$.

Решение

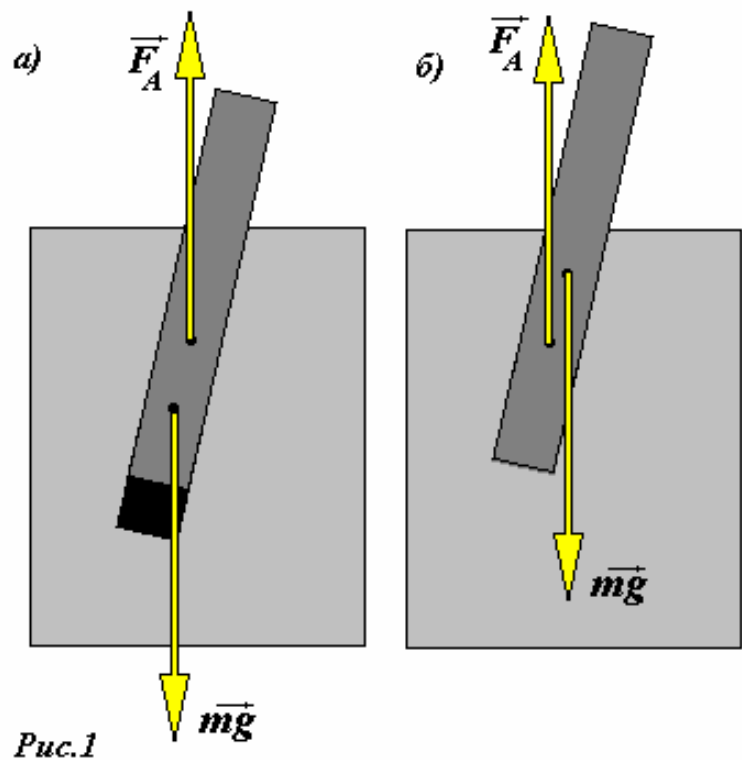


Задание 1. «Разминка»

Задача 9.1.1

1.1.1 На свечу, погруженную в воду, действуют сила тяжести F_T и сила Архимеда F_A .

Чтобы свеча вообще плавала, должно выполняться условие плавания: архимедова сила должна быть равна силе тяжести



$$F_A = F_T. \quad (1)$$

Для устойчивого плавания свечи необходимо, чтобы при отклонениях от вертикального положения возникал момент сил, возвращающий свечу в первоначальное положение. Это условие будет выполнено, если точка приложения силы тяжести (центр масс свечи) будет лежать ниже точки приложения выталкивающей силы Архимеда совпадающей с центром масс вытесненной жидкости – центром плавания (рис.1а), в противном случае вертикальное положение будет неустойчиво (рис.1б).

В случае однородной свечи центр тяжести всегда будет находиться выше центра плавания, поэтому свеча не может устойчиво плавать в вертикальном положении. Именно для этого к нижнему основанию свечи прикрепляется алюминиевая шайба.

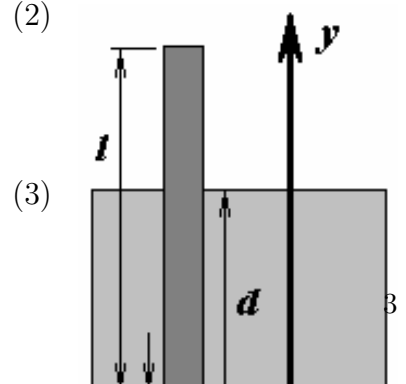
Если длина свечи больше нескольких диаметров, то можно пренебречь изменением положения точки приложения силы Архимеда при ее наклоне.

Обозначим глубину погружения свечи с алюминиевой шайбой под воду d (рис. 2). Тогда условие (1) записывается, как

$$\rho g s l + \rho_1 g s h = \rho_0 g s d \quad (2)$$

откуда следует

$$d = \frac{\rho l + \rho_1 h}{\rho_0}. \quad (3)$$



Свеча будет плавать, если глубина её погружения не превышает сумму высот свечи и шайбы, то есть при $d \leq l + h$. С учетом соотношения (3) это условие принимает вид

$$\frac{\rho l + \rho_1 h}{\rho_0} \leq l + h. \quad (4)$$

Теперь определим, при какой высоте свеча сможет плавать устойчиво в вертикальном положении. Выберем ось координат Oy , с началом отсчета по нижнему краю алюминиевой шайбы. Тогда координата центра плавания будет равна

$$y_A = \frac{d}{2} = \frac{1}{2} \frac{\rho l + \rho_1 h}{\rho_0}, \quad (6)$$

а координата центра тяжести

$$y_c = \frac{\rho_1 h \frac{h}{2} + \rho l \left(h + \frac{l}{2}\right)}{\rho_1 h + \rho l} \quad (7)$$

Таким образом, условие устойчивости $y_A \geq y_c$ формулируется в виде неравенства

$$\frac{1}{2} \frac{\rho l + \rho_1 h}{\rho_0} \geq \frac{\rho_1 h \frac{h}{2} + \rho l \left(h + \frac{l}{2}\right)}{\rho_1 h + \rho l}. \quad (8)$$

Совместное решение неравенств (4) и (8), первое из которых линейное, а второе - квадратное, и дает нам интервал длин, при которых свеча устойчиво будет плавать в воде

$$8,5 \text{ см} \leq l \leq 18,5 \text{ см}. \quad (9)$$

1.1.2 Свеча погаснет, когда её длина станет равной минимально возможной для плавания, т.е. $l_{\min} = 8,5$ см. Значит, гореть она будет в течение времени

$$t = \frac{l - l_{\min}}{u} = 15 \text{ мин}. \quad (10)$$

Отметим, что все время горения свеча будет плавать устойчиво.

Дополнения.

1. Проиллюстрируем графически решение данной задачи. На рис. 3 построены графики зависимостей полной длины свечи вместе с шайбой ($l + h$); глубины погружения d , рассчитанной по формуле (3); координаты центра плавания (6) и координаты центра масс (7) от

длины парафиновой части свечи l (деления шкал даны в сантиметрах). Заливкой выделены области, в которых выполняются условие плавания и условие устойчивости.

Рис.3

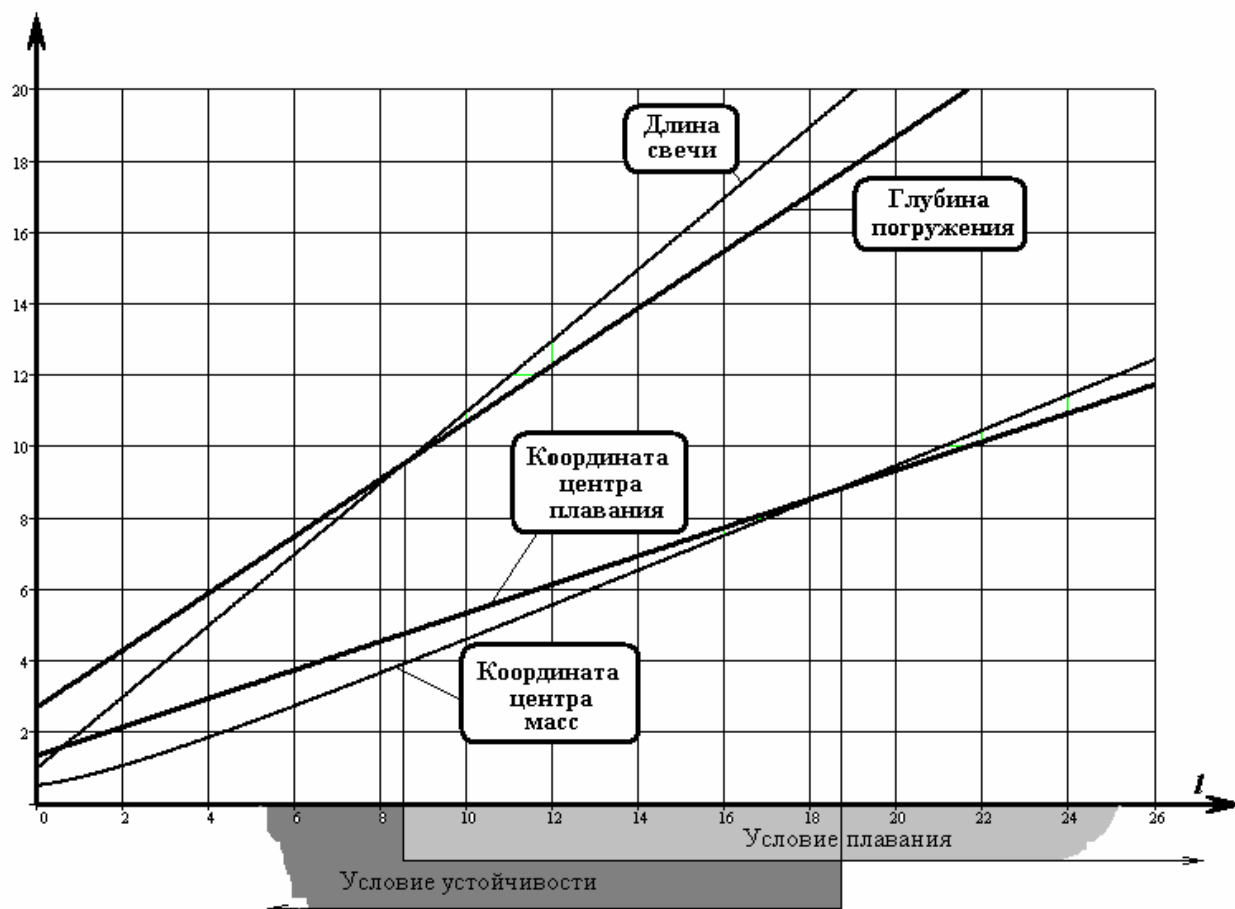


Рис.3

2. Приведем более подробные выкладки, необходимые для решения системы неравенств. Для упрощения работы с громоздкими выражениями в дальнейшем введем безразмерные переменные $\eta = \rho/\rho_0$, $\eta_1 = \rho_1/\rho_0$, $\xi = l/h$. Используя данные условия $\eta = 0,8$; $\eta_1 = 2,7$. В новых переменных глубина погружения

$$d = (\eta\xi + \eta_1)h, \quad (д1)$$

а условие плавания (4) превращается в

$$\eta\xi + \eta_1 \leq \xi + 1. \quad (д2)$$

Решаем это неравенство: $\xi(1-\eta) \geq \eta_1 - 1$ и поскольку $1-\eta = 0,2 > 0$, то

$$\xi \geq \frac{\eta_1 - 1}{(1 - \eta)}. \quad (\text{д3})$$

Минимальная высота свечи, при которой она ещё сможет плавать, равна

$$l_{\min} = \xi_{\min} h = \frac{\eta_1 - 1}{(1 - \eta)} h, \quad (\text{д4})$$

или $l_{\min} = \frac{2,7-1}{1-0,2} \cdot 1,0 \text{ см} = 8,5 \text{ см}$. В безразмерных переменных координата центра выталкивания равна

$$y_A = \frac{d}{2} = \frac{(\eta\xi + \eta_1)h}{2}, \quad (\text{д5})$$

а координата центра тяжести

$$y_C = \frac{\rho_1 h \frac{h}{2} + \rho l (h + \frac{l}{2})}{\rho_1 h + \rho l} = \frac{\frac{1}{2}\eta_1 + \eta\xi + \frac{1}{2}\eta\xi^2}{\eta_1 + \eta\xi} h. \quad (\text{д6})$$

Выполним математические преобразования необходимые для решения неравенства (8) с учетом того, что $\eta_1 + \eta\xi > 0$

$$\frac{(\eta\xi + \eta_1)h}{2} \geq \frac{\frac{1}{2}\eta_1 + \eta\xi + \frac{1}{2}\eta\xi^2}{\eta_1 + \eta\xi} h$$

$$(\eta\xi + \eta_1) \geq \frac{\eta_1 + 2\eta\xi + \eta\xi^2}{\eta_1 + \eta\xi}$$

$$(\eta\xi + \eta_1)^2 \geq \eta_1 + 2\eta\xi + \eta\xi^2$$

$$\eta^2\xi^2 + \eta_1^2 + 2\eta\eta_1\xi \geq \eta_1 + 2\eta\xi + \eta\xi^2$$

$$\eta(1 - \eta)\xi^2 + 2\eta(1 - \eta_1)\xi + \eta_1(1 - \eta_1) \leq 0$$

Мы получили квадратичное неравенство относительно ξ . Поскольку коэффициент при ξ^2 положительный, решением этого неравенства будет $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$, где $\xi_{1,2}$ - корни квадратного уравнения

$$\eta(1 - \eta)\xi^2 + 2\eta(1 - \eta_1)\xi + \eta_1(1 - \eta_1) = 0.$$

Его дискриминант равен

$$D/4 = (b/2)^2 - ac = \eta^2(1-\eta_1)^2 - \eta(1-\eta)\eta_1(1-\eta_1) = \eta(1-\eta_1)[\eta(1-\eta_1) - \eta_1(1-\eta)] =$$

$$\eta(1-\eta_1)[\eta - \eta\eta_1 - \eta_1 + \eta\eta_1] = \eta(1-\eta_1)(\eta - \eta_1) = \eta(\eta_1 - 1)(\eta_1 - \eta)$$

При наших данных $D/4 = 0,8(2,7 - 1)(2,7 - 0,8) = 2,6 > 0$, следовательно, существует 2 действительных корня этого уравнения:

$$\xi_{1,2} = \frac{-\eta(1-\eta_1) \pm \sqrt{\eta(\eta_1-1)(\eta_1-\eta)}}{\eta(1-\eta)} = \frac{\eta_1-1}{1-\eta} \pm \frac{1}{1-\eta} \sqrt{\frac{(\eta_1-1)(\eta_1-\eta)}{\eta}}.$$

Подстановка численных значений исходных данных приводит к результату $\xi_1 = -1,5$; $\xi_2 = 18,5$.

Таким образом, условие устойчивого плавания имеет вид:

$$\frac{\eta_1-1}{1-\eta} - \frac{1}{1-\eta} \sqrt{\frac{(\eta_1-1)(\eta_1-\eta)}{\eta}} \leq \xi \leq \frac{\eta_1-1}{1-\eta} + \frac{1}{1-\eta} \sqrt{\frac{(\eta_1-1)(\eta_1-\eta)}{\eta}},$$

а с учетом условия плавания (д3))

$$\frac{\eta_1-1}{1-\eta} \leq \xi \leq \frac{\eta_1-1}{1-\eta} + \frac{1}{1-\eta} \sqrt{\frac{(\eta_1-1)(\eta_1-\eta)}{\eta}}.$$

Итак, для устойчивого плавания должно выполняться $-1,5 \text{ см} \leq l \leq 18,5 \text{ см}$, для плавания вообще $l \geq 8,5 \text{ см}$. Таким образом, свеча будет устойчиво плавать, если длина свечи лежит в интервале $8,5 \text{ см} \leq l \leq 18,5 \text{ см}$.

Задача 9.1.2

После замыкания электрической цепи вследствие выделения тепла Джоуля-Ленца температура t проводника начнет расти. Однако как следует из условия, по мере роста температуры проводника будет увеличиваться и количество теплоты, отдаваемое им в единицу времени в окружающее пространство. Следовательно, при некотором значении t_i мощность P тепловыделения в проводнике сравняется с мощностью $P_{\text{охл}}$ тепловых потерь (охлаждения) через его поверхность, и дальнейший рост температуры в системе прекратится.

Запишем условие динамического равновесия $P_{\text{охл}} = P$ с учетом закона Джоуля-Ленца

$$\frac{U^2}{R} = \alpha(t_i - t_0)S, \quad (1)$$

где t_i — максимальная (установившаяся) температура проводника.

Подставляя в (1) выражения для сопротивления проводника $R = \rho \frac{l}{S} = \rho \frac{l}{\pi r^2}$ и площади его боковой поверхности $S = 2\pi r l$ (теплоотдачей через торцы цилиндра пренебрегаем, т.к. $r \ll l$) получим

$$\frac{U^2}{\rho l} \pi r^2 = \alpha(t_i - t_0) 2\pi r l \Rightarrow t_i - t_0 = \{t_0 = 0,0^\circ\text{C}\} = t_i = \frac{U^2 r}{2\rho \alpha l^2}, \quad (2)$$

где U — напряжение на проводнике. Поскольку объем проводника остается неизменным, то изменение длины проводника приводит к изменению его радиуса. Эта связь следует из выражения для объема

$$V = \pi r^2 l \Rightarrow r = \sqrt{\frac{V}{\pi l}}. \quad (3)$$

Подставляя, это выражение в формулу (2), для температуры проволоки получим

$$t_i = \frac{U^2}{2\rho \alpha l^2} \sqrt{\frac{V}{\pi l}} = \frac{C}{l^{5/2}}. \quad (4)$$

где C — постоянный для данных условий коэффициент. Записав два подобных соотношения для начальной конечной длины проводника и разделив их друг на друга, получим пропорцию

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{l_1^{5/2}}{l_2^{5/2}}. \quad (5)$$

из которой следует ответ задачи $t_2 = t_1 \sqrt{\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^5} \approx 10^\circ\text{C}$.

Уменьшение температуры проводника после растяжения вполне понятно и на качественном уровне: к этому ведет как падение мощности тепловыделения вследствие увеличения сопротивления, так и увеличение площади теплоотдачи (поверхности) проводника.

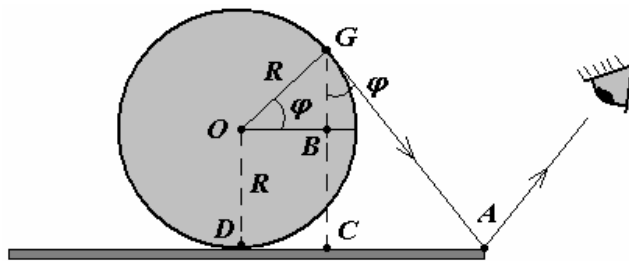
Отметим, что радиус проводника, заданный в условии задачи, не вошел в конечный результат. Однако малое численное значение этого параметра позволяет считать, что распределение тока внутри проводника является однородным.

Задача 9.1.3

Как следует из рисунка, увидеть в зеркале минимального размера некоторую точку G на глобусе можно только в том случае, если луч, идущий по касательной к шару в этой точке попадет на край зеркала A .

Следует заметить, что в этом случае она будет всего лишь «на горизонте» глобуса, но предположим, что острота зрения смотрящего достаточно точна для подобного наблюдения.

Искомый минимальный радиус зеркала найдем как



$$R_{\min} = DC + CA = \{(DC = OB)\} = R \cos \varphi + CG \operatorname{tg} \varphi. \quad (1)$$

Поскольку $CG = R + R \sin \varphi$, то окончательно получаем

$$R_{\min} = R \cos \varphi + R(1 + \sin \varphi) \operatorname{tg} \varphi = R(\cos \varphi + (1 + \sin \varphi) \operatorname{tg} \varphi). \quad (2)$$

Расчет по (2) для угла $\varphi = 55^\circ$ дает

$$R_{\min} = 0,63 \text{ м.}$$

Интересно, что, чисто теоретически из (2) следует, при неограниченном возрастании радиуса зеркала ($R_{\min} \rightarrow \infty$) можно увидеть даже точку северного полюса глобуса ($\varphi = \frac{\pi}{2}$), что в реальности невозможно из-за ограниченной разрешающей способности глаза человека.

¹ Все кинематические характеристики движения изображений будем «штриховать»