

2004г. Решения задач.

9 класс.

Задание 9.1

а) Пусть кран равномерно поднимает груз m при угле поворота башни крана φ и подъеме стрелы на угол α над горизонтом. Основная нагрузка в этом случае будет приходиться на колесный ряд, расположенный со стороны груза. Соответственно здесь (вдоль длинной стороны крана) будет проходить ось возможного опрокидывания машины. Опрокидывающий момент силы тяжести груза относительно этой оси, параллельной длинной стороне крана, равен

$$M_1 = m g \left(l_1 \cos \alpha \sin \varphi - \frac{a}{2} \right). \quad (1)$$

Соответственно стабилизирующий момент силы тяжести самого крана относительно той же оси

$$M_2 = M g \frac{a}{2} \quad (2)$$

При равновесии крана

$$M_1 = M_2 \Rightarrow m = \frac{a}{2l_1 \cos \alpha \sin \varphi - a} M = 2,5 \text{ т}. \quad (3)$$

Подчеркнем, что необходимо также проверить условие отсутствия опрокидывания крана относительно второй (малой) стороны при равномерном подъеме груза. В этом случае (будем считать, что передние колеса удалены от начала машины незначительно)

$$M_1 = m g \left(l_1 \cos \alpha \cos \varphi - \frac{3a}{4} \right) \quad (4)$$

$$M_2 = M g a \quad (5)$$

Из условий (4)-(5) находим максимально возможный груз для «короткой» оси крана

$$m = \frac{4a}{4l_1 \cos \alpha \cos \varphi - 3a} = 7,3 \text{ т}. \quad (6)$$

Как видим, в этом случае максимальное значение груза ограничивается наименьшим из значений (3) или (6)

$$m = 2,5 \text{ т}. \quad (7)$$

Как и следовало ожидать, наиболее вероятное опрокидывание машины в этом случае — «набок».

б) При вычислении максимальной грузоподъемности в наиболее опасном положении следует в (3) положить $\varphi = 90^\circ$, $l_1 = l$. Соответствующий расчет дает

$$m_3 = \frac{a}{2l \cos \alpha - a} M = 1,1 \text{ т} \quad (8)$$

При ускоренном движении груза вверх его вес (соответственно и опрокидывающий момент) увеличиваются по закону

$$T = m_4 (a + g) \quad (9)$$

Следовательно, при максимальном ускорении груза a_{\max} должно выполняться равенство

$$m_4 (a_{\max} + g) = m_3 g \Rightarrow a_{\max} = \frac{m_3 - m_4}{m_4} g = \frac{g}{10} = 0,98 \frac{M}{c^2}. \quad (10)$$

Конечно же силы давлений правого и левого колесных рядов крана на грунт будут различны, поскольку в противном случае они не смогут удержать машину в равновесии. Более того, можно заметить, что при критических параметрах внешний (по отношению к нагрузке) колесный ряд уже оторвется от земли и не будет оказывать на

нее давления. Незначительное увеличение нагрузки в этом случае может привести к опрокидыванию машины.

в) При выдвигании боковых упоров увеличивается площадь опоры автокрана, что, в соответствии с правилами статики, увеличивает его устойчивость. Формально это можно описать заменой a в выражении (8) на $a + 2\Delta a$. Соответствующий расчет дает

$$M = \frac{a + \Delta a}{2l \cos \alpha - (a + \Delta a)} M \Rightarrow \Delta a = \frac{l \cos \alpha - a}{2} = 9 \text{ м}. \quad (11)$$

Конечно же, упоры получились «гигантских» размеров, поскольку мы потребовали от обычного автокрана «муравьиной супермощности». В реальности автокраны работают с грузами, не превосходящими их по массе, что требует упоров значительно меньших размеров.

Задание 9.2

1. Во время движения на пробирку действуют сила тяжести, выталкивающая сила Архимеда и сила вязкого трения, пропорциональная скорости движения пробирки. Так как сила сопротивления пропорциональна скорости, то по прошествии малого промежутка времени пробирка будет двигаться с постоянной скоростью, которую можно найти из условия равновесия сил (положительное направление – вверх):

$$\rho V g - m_0 g - \rho_1 \eta V g = \beta v, \quad (1)$$

где ρ, ρ_1 - плотности воды и жидкости внутри пробирки, V - объем пробирки, m_0 - масса пустой пробирки, β - коэффициент пропорциональности между силой сопротивления и скоростью пробирки. Основная причина, приводящая к возникновению силы сопротивления – перетекание воды в узком слое между стенками трубки и пробирки, поэтому коэффициент β приблизительно пропорционален длине пробирки.

Следовательно, если взять пробирку вдвое большей длины (при прочих равных условиях), то указанные скорости приблизительно уменьшатся в два раза.

2. Из уравнения (1) следует, что скорость установившегося движения пробирки линейно зависит от степени ее наполнения

$$v = A\eta + B, \quad (2)$$

где A, B - постоянные коэффициенты, которые можно определить из двух известных скоростей. Окончательный вид зависимости скорости от степени наполнения имеет вид

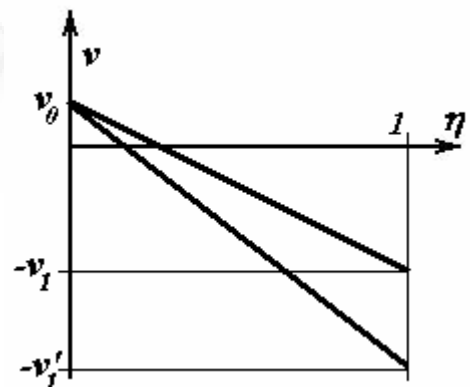
$$v = -(v_0 + v_1)\eta + v_0. \quad (3)$$

3. Из уравнения (1) следует, что коэффициент при η , в линейной зависимости вида (2), пропорционален плотности налитой жидкости. Поэтому для другой жидкости зависимость скорости от степени наполнения будет иметь вид

$$v = -n(v_0 + v_1)\eta + v_0. \quad (4)$$

Графики этих зависимостей показаны на рисунке, где обозначена скорость движения пробирки, полностью заполненной другой жидкостью,

$$v'_1 = nv_1 + (n-1)v_0.$$



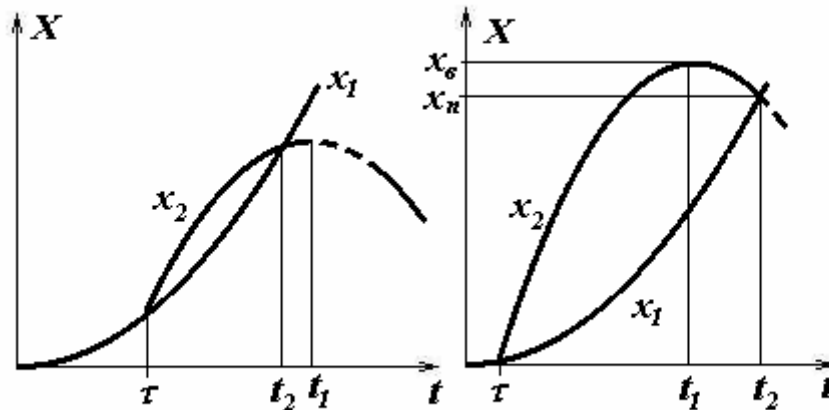
Задние 9.3

1. Законы движения платформы $x_1(t)$ и шарика $x_2(t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{at^2}{2} \\ x_2 &= \frac{a\tau^2}{2} + (a\tau + v_0) \cdot (t - \tau) - \frac{g(t - \tau)^2}{2} \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь начало отсчета времени совмещено со стартом платформы, а начало отсчета вертикальной оси X находится на поверхности земли.

Схематические графики законов движения показаны ниже на рисунке.



Следует отметить, что в данной задаче следует рассмотреть два варианта:

- до падения на платформу шарик успевает достичь верхней точки траектории свободного движения;
- платформа догоняет шарик, который продолжает двигаться вверх.

Для упрощения дальнейших расчетов совместим начало отсчета координат с точкой, в которой был брошен шарик, с этим же моментом свяжем начало отсчета времени. В такой системе отсчета законы движения имеют вид

$$\begin{aligned} x_1 &= a\tau \cdot t + \frac{at^2}{2} \\ x_2 &= (a\tau + v_0) \cdot t - \frac{gt^2}{2} \end{aligned} \quad (2)$$

Определим момент времени падения шарика на платформу t_2 , для чего следует решить уравнение $x_1(t_2) = x_2(t_2)$. Решение этого уравнения выражается формулой

$$t_2 = \frac{2v_0}{a + g} \quad (3)$$

При свободном движении шарика в верхней точке его скорость обращается в нуль, что позволяет найти этот момент времени. Так как скорость шарика изменяется по закону $v_2 = (a\tau + v_0) - gt$, то скорость шарика может обратиться в нуль при

$$t_1 = \frac{a\tau + v_0}{g} \quad (4)$$

Итак, шарик не успеет достичь верхней точки своей траектории свободного движения при выполнении условия $t_1 > t_2$, или при следующем соотношении между исходными параметрами

$$v_0 < a\tau \frac{g+a}{g-a}. \quad (5)$$

В этом случае модуль перемещения и пройденный путь равны и могут быть найдены как координата точки падения шарика на платформу

$$x_n = x_1(t_2) = x_2(t_2) = \frac{2v_0 a}{a+g} \cdot \left(\tau + \frac{v_0}{a+g} \right). \quad (6)$$

Если же неравенство (5) не выполняется, то пройденный путь будет превышать модуль перемещения (который, по-прежнему, определяется формулой (6)). Как легко увидеть из графиков законов движения, в этом случае пройденный путь равен

$$S = x_n + 2(x_e - x_n), \quad (7)$$

где x_e -координата верхней точки траектории, которая в свою очередь легко определима

$$x_e = \frac{(a\tau + v_0)^2}{2g}. \quad (8)$$

Итак, окончательно получим выражения для пройденного пути

$$S = \frac{(a\tau + v_0)^2}{g} - \frac{2v_0 a}{a+g} \cdot \left(\tau + \frac{v_0}{a+g} \right). \quad (9)$$

Задание 9.4

а) процесс разрезания бруса представляет собой процесс плавления той области образца, где проходит нож. Следовательно, необходимо расплавить слой льда массой

$$m = \rho \cdot V = \rho ab2r, \quad (1)$$

где ρ^* - плотность льда. Для этого потребуется количество теплоты

$$Q = \lambda \cdot m = 2\lambda \rho ab r, \quad (2)$$

которое должно выделиться на резисторе сопротивлением

$$R = \rho^* \frac{l}{S} = \rho^* \frac{b}{\pi r^2}, \quad (3)$$

где ρ^* — удельное сопротивление стали. С учетом закона Джоуля-Ленца можем записать

$$\frac{U^2}{R} t_1 = \lambda m \Rightarrow \{(1)-(3)\} \Rightarrow \frac{U^2 \pi r^2}{\rho^* b} t_1 = 2\lambda \rho ab r. \quad (4)$$

Из (4) находим искомое время

$$t_1 = \frac{2\lambda \rho \rho^* ab^2}{U^2 \pi r} = 1,9 \cdot 10^2 \text{ с}. \quad (5)$$

Соответственно, для скорости движения ножа получаем

$$v = \frac{a}{t_1} = \frac{U^2 \pi r}{2\lambda \rho \rho^* b^2} = 5,3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{М}}{\text{с}} = 5,3 \frac{\text{мм}}{\text{с}}. \quad (6)$$

Из анализа (6) видно, что при заданных параметрах системы скорость движения ножа относительно бруса является постоянной величиной и не зависит от толщины a бруса.

б) Для решения задачи в этом случае перейдем в подвижную систему отсчета, связанную с брусом, т.е. движущуюся влево со скоростью \vec{u} . Согласно преобразованиям Галилея при таком переходе (прямом) скорость ножа относительно земли \vec{w} связана с относительной скоростью \vec{v} следующим образом

$$\vec{v} = \vec{w} - \vec{u}. \quad (7)$$

Поскольку скорость движения ножа относительно бруса (6) не может измениться по модулю (см. пункт а)), то из прямоугольного треугольника скоростей, соответствующего преобразованиям Галилея, найдем скорость w нормального движения ножа

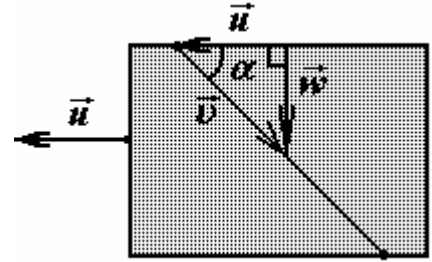
$$w = \sqrt{v^2 - u^2} = 4,4 \frac{\text{мм}}{\text{с}}. \quad (8)$$

При таком способе «распилки» потребуется время

$$t_2 = \frac{a}{w} = 2,3 \cdot 10^2 \text{ с}. \quad (9)$$

Угол α при вершине бруса в этом случае определяется опять же из векторного треугольника скоростей

$$\cos \alpha = \frac{u}{v} = 0,57 \Rightarrow \alpha = 56^\circ = 0,97 \text{ рад}. \quad (10)$$



10 класс.

Задание 10.1

1. Из формулы закона Дарси следует, что размерность проницаемости – *секунда*.

Пусть слой воды толщиной h движется горизонтально через песок под действием разности давлений ΔP . Так как вода движется равномерно, то сумма внешних сил, действующих на воду равна нулю. Следовательно, сила сопротивления действующая на воду со стороны песка, равна $f_c = \Delta P S$, где S площадь произвольно выделенной части движущегося слоя. Эту силу можно также выразить из приведенного закона Дарси $\Delta P S = \frac{h S}{\beta} q$. Наконец, поток жидкости можно выразить через ее скорость v : $q = \eta \rho v$. Итак, сила сопротивления, действующая на выделенную часть слоя, определяется формулой

$$f_c = \frac{\eta \rho}{\beta} S h v. \quad (1)$$

2. При вертикальном движении слоя жидкости в пористой среде сила тяжести уравнивается силой сопротивления, поэтому

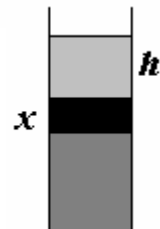
$$\eta \rho S h g = \frac{\eta \rho S h}{\beta} v. \quad (2)$$

Откуда следует, что скорость равномерного движения слоя воды равна

$$v = \beta g. \quad (3)$$

3. Не смотря на то, что скорость движения воды будет изменяться, будем считать, что эти изменения малы. Поэтому в любой момент времени сумма сил, действующих на воду, будет равна нулю (используем традиционное квазистационарное приближение). Обозначим высоту слоя не впитавшейся воды h , а толщину намокшего песка x . Учитывая, что сила тяжести, действующая на всю воду, уравнивается силой сопротивления, действующей только на слой воды, находящейся в песке, запишем выражения для равенства этих сил

$$\rho S h_0 g = \frac{\eta \rho S x}{\beta} v. \quad (4)$$



Так как $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, то из уравнения (4) следует

$$x = \sqrt{\frac{2h_0\beta g}{\eta} t}. \quad (5)$$

Запишем условие сохранения количества воды

$$\rho h + \eta \rho x = \rho h_0, \quad (6)$$

которое позволяет найти искомую зависимость толщины слоя не впитавшейся воды от времени

$$h = h_0 - \sqrt{2h_0\beta g \eta t}. \quad (7)$$

Полагая $h = 0$, найдем время впитывания

$$T = \frac{h_0}{2\beta\eta g}, \quad (8)$$

3. Так как скорость движения жидкости внутри песка не зависит от его толщины, то после полного впитывания верхняя граница «мокрого» слоя будет постоянна и определяться формулой (3). Следовательно, вся вода пройдет через слой песка за время

$$T = \frac{h_0}{2\beta\eta g} + \frac{h_1}{\beta g}. \quad (9)$$

Задание 10.2

Будем рассматривать движение по этапам. Все кинематические характеристики, относящиеся к ящику, будем нумеровать индексом 0, а, относящиеся к салазкам – индексом 1, координатами салазок будем считать координату их задней части.

1. Разгон ящика описывается хорошо известными уравнениями:

$$\begin{cases} v_0 = a_0 t \\ x_0 = \frac{a_0 t^2}{2} \end{cases}. \quad (1)$$

Этот разгон закончится в момент времени $t_1 = \sqrt{\frac{2l_0}{a_0}} \approx 2,00c$, ящик будет иметь

скорость $v_{01} = \sqrt{2a_0 l_0} \approx 6,00 \frac{M}{c}$.

2. Разгон салазок. После того, как ящик окажется на салазках, начнется их разгон под действием силы трения со стороны ящика. Рассмотрев действующие силы трения между ящиком и салазками $F_0 = F'_0 = \mu_0 m_0 g$;

между салазками и льдом $F_1 = \mu_1 (m_0 + m_1) g$,

определим ускорения салазок и ящика

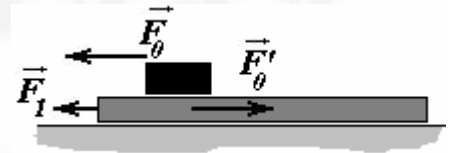
$$a_{01} = -\mu_0 g \approx -3,0 \frac{M}{c^2}, \quad a_{11} = \frac{\mu_0 m_0 - \mu_1 (m_0 + m_1)}{m_1} g \approx 5,4 \frac{M}{c^2}.$$

Зависимости скоростей и координат движущихся тел определяются уравнениями (для сокращения записей сместим начало отсчета времени)

$$\begin{cases} v_0 = v_{01} + a_{01} t \\ v_1 = a_{11} t \end{cases}, \quad \begin{cases} x_0 = l_0 + v_{01} t + \frac{a_{01} t^2}{2} \\ x_1 = l_0 + \frac{a_{11} t^2}{2} \end{cases}. \quad (2)$$

Далее следует заметить, что такое движение будет происходить пока скорости салазок

и ящика не сравняются, Это произойдет через время $t_2 = \frac{v_{01}}{a_{11} + |a_{01}|} \approx 0,714c$.



До этого момента времени доска сместится на $\Delta x_{11} \approx 1,38 м$, а ящик на $\Delta x_{01} \approx 3,52 м$. Так как $\Delta x_{01} - \Delta x_{11} < L$ (до конца салазок остается $\Delta L = L - (\Delta x_{01} - \Delta x_{11}) \approx 0,86 м$), то ящик останется на салазках. В момент прекращения относительного движения ящика по салазкам их скорость будет равна $v_{02} \approx 3,85 \frac{м}{с}$.

3. Торможение. Далее салазки с неподвижным ящиком будут двигаться вместе с ускорением $a_2 = -\mu_1 g \approx -0,20 \frac{м}{с^2}$. До полной остановки салазки могут пройти по льду путь $S = \frac{v_{02}^2}{2|a_2|} \approx 37,25 м$, что больше оставшегося расстояния до противоположного берега. На этом участке скорости и координаты будут изменяться по законам

$$\begin{cases} v_0 = v_{02} + a_2 t \\ v_1 = v_{02} + a_2 t' \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = l_0 + \Delta x_{01} + v_{02} t + \frac{a_2 t^2}{2} \\ x_1 = l_0 + \Delta x_{11} + v_{02} t + \frac{a_2 t^2}{2} \end{cases} \quad (3)$$

До противоположного берега салазкам остается пройти расстояние $l = l_1 - L - \Delta x_{11} \approx 25,6 м$. Салазки подьедут к берегу со скоростью, которую можно рассчитать по формуле $v_{03} = \sqrt{v_{02}^2 - 2|a_2|l} \approx 2,14 \frac{м}{с}$. Это произойдет через время

$$\Delta t_2 = \frac{v_{03} - v_{02}}{a_2} \approx 8,55 с$$

4. Торможение по салазкам. После того, как салазки «упрутся» в берег, ящик начнет скользить по салазкам с ускорением $a_{03} = -\mu_0 g \approx -2,0 \frac{м}{с^2}$. По салазкам они могут

пройти путь $S = \frac{v_{03}^2}{2|a_{03}|} \approx 1,15 м$, что больше, чем расстояние ΔL до конца салазок,

поэтому ящик соскользнет с них. Скорость ящика в момент выезда на берег

$$v_{04} = \sqrt{v_{03}^2 - 2|a_{03}|\Delta L} \approx 1,07 \frac{м}{с}, \text{ что произойдет через время } \Delta t_3 = \frac{v_{04} - v_{03}}{a_{03}} \approx 0,54 с.$$

Законы изменения скорости и координаты ящика на этом этапе имеет вид

$$\begin{aligned} v_0 &= v_{04} + a_{03} t \\ x_0 &= l_0 + l_1 - \Delta L + v_{04} t + \frac{a_{03} t^2}{2} \end{aligned} \quad (4)$$

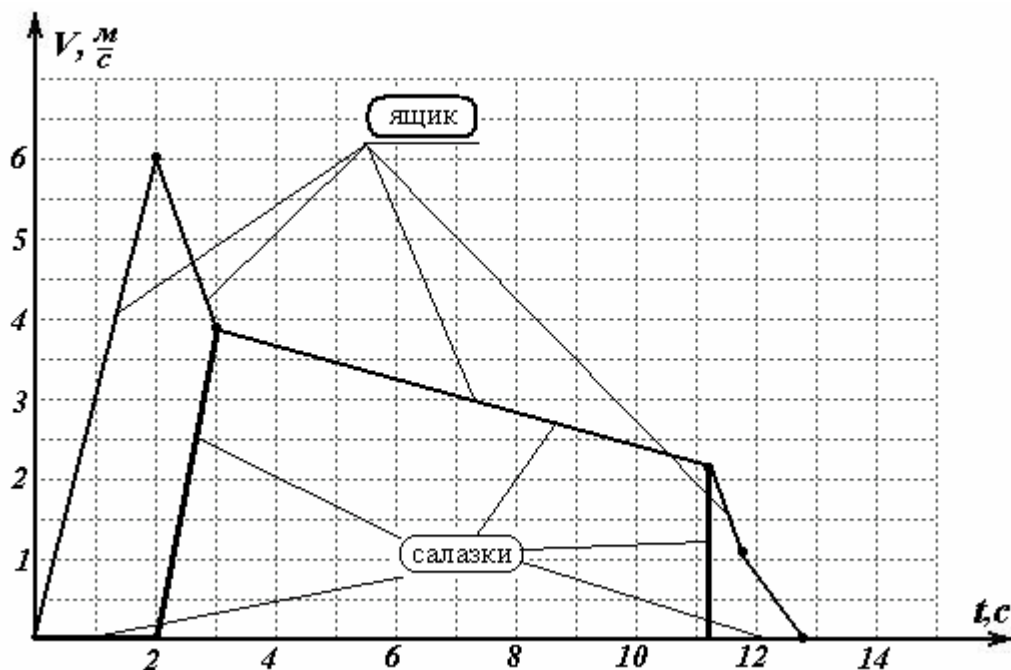
5. Торможение по берегу. Ящик на берегу тормозит с ускорением $a_{04} = -\mu_2 g \approx -1,0 \frac{м}{с^2}$.

При этом он пройдет путь $S = \frac{v_{04}^2}{2|a_{04}|} \approx 0,57 м$ до остановки за время $\Delta t_5 = -\frac{v_{04}}{a_{03}} \approx 1,1 с$.

Законы изменения скорости и координаты ящика на том этапе имеет вид

$$\begin{aligned} v_0 &= v_{04} + a_{04} t \\ x_0 &= l_0 + l_1 + v_{04} t + \frac{a_{04} t^2}{2} \end{aligned} \quad (4)$$

Графики зависимостей скоростей от времени показаны на рисунке.



2. Полный путь до остановки оставит **33,6 м** за время **12,9 с**.

Задание 10.3

Поскольку кольцо и стержень имеют заряды противоположных знаков, то в положении равновесия стержень расположится симметрично относительно центра кольца. Рассмотрим малое смещение x ($x \ll R$) стержня из положения равновесия например вверх (рис. 2). Поскольку при этом над кольцом окажется большая часть стержня, то результирующая сила со стороны кольца будет стремиться вернуть стержень в положение равновесия.

Для расчета этой силы заметим, что в данном случае «нескомпенсированной» остается только сила притяжения к кольцу малого участка стержня длиной $2x$ (незаштрихованная на рис.), имеющая заряд

$$\Delta q = \lambda 2x = \frac{q}{l} 2x = \frac{q}{R} x. \quad (1)$$

Поскольку напряженность электростатического поля на оси кольца на расстоянии h от его центра вычисляется по формуле

$$E(h) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{h}{(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (2)$$

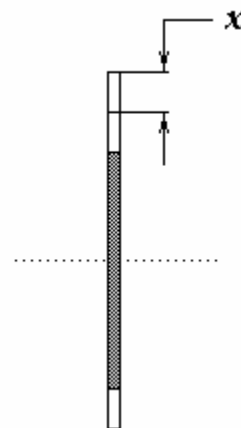
то для нашего случая ($h = R$) получаем

$$E(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R}{(2R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{q}{8\sqrt{2}\pi\epsilon_0 R^2}. \quad (3)$$

Таким образом, уравнение движения (второй закон Ньютона) для стержня примет вид

$$ma = mx''(t) = -\Delta q \cdot E(R) = -\frac{q}{R} \cdot \frac{q}{8\sqrt{2}\pi\epsilon_0 R^2} \cdot x = -\frac{q^2}{8\sqrt{2}\pi\epsilon_0 R^3} \cdot x. \quad (4)$$

Уравнение (4) можно переписать в виде стандартного уравнения гармонических колебаний



$$x''(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \text{ где } \omega_0 = \sqrt{\frac{q^2}{8\sqrt{2\pi}\varepsilon_0 m R^3}} = \frac{q}{2R} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2\pi}\varepsilon_0 m R}}. \quad (5)$$

Соответственно период данных колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{4\pi R}{q} \sqrt{2\sqrt{2\pi}\varepsilon_0 m R}. \quad (6)$$

Задание 10.4

а) Рассмотрим процесс возникновения магнитного поля при вращении цилиндров.

Индукция B однородного магнитного поля внутри достаточно длинного соленоида с однослойной плотностью намотки $n = \frac{N}{l}$ и силой тока I может быть найдена по формуле

$$B = \mu_0 i = \left\{ i = \frac{I_{\Sigma}}{l} = \frac{IN}{l} = In \right\} = \mu_0 I n. \quad (1)$$

Подчеркнем, что вне бесконечного соленоида поля нет. В реальном случае магнитное поле выходит через торцы соленоида (область т.н. «краевых эффектов»), следовательно, оно отлично от нуля и вне соленоида. Поскольку цилиндры, согласно условию, достаточно длинные, то указанными эффектами пренебрежем.

В рассматриваемом случае ток, в буквальном смысле слова, через цилиндры не течет, однако его заменяет направленное движение статических зарядов на поверхностях цилиндров при вращении. За один оборот весь заряд $q = \sigma 2\pi R l$ цилиндра пройдет через некоторое фиксированное поперечное сечение его боковой поверхности длиной l . Следовательно, сила тока, «протекающего» по поверхности цилиндра радиуса R при его вращении с угловой скоростью ω

$$I = \frac{q}{t} = \frac{\sigma 2\pi R l}{2\pi / \omega} = \sigma \omega R l. \quad (2)$$

Соответственно для линейной плотности тока в этом случае получаем выражение

$$i = \frac{I}{l} = \sigma \omega R. \quad (3)$$

С помощью (1) - (3) и найдем индукцию B однородного магнитного поля внутри достаточно длинного вращающегося цилиндра

$$B = \mu_0 \sigma \omega R. \quad (4)$$

Направление вектора \vec{B} магнитной индукции внутри цилиндра можно найти при помощи правила буравчика. При этом следует направление тока заменить направлением вращения цилиндра (при положительной плотности поверхностного заряда σ).

Таким образом, при вращении цилиндров в одном направлении, искомая зависимость имеет вид

$$B(r) = \begin{cases} \mu_0 (\sigma_1 \omega_1 R_1 + \sigma_2 \omega_2 R_2) & \text{при } r < R_1 \\ \mu_0 \sigma_2 \omega_2 R_2 & \text{при } R_1 < r < R_2. \\ 0 & \text{при } r > R_2 \end{cases} \quad (5)$$

При вращении цилиндров в различных направлениях в представленной зависимости, в соответствие с правилом буравчика следует взять знак «-».

б) Для вычисления давления, создаваемого магнитным полем вращающегося цилиндра на его же боковую поверхность цилиндра следует учесть, что на выделенный элемент с током ΔS_i боковой поверхности цилиндра не может действовать магнитное поле,

создаваемое им самим. Из принципа суперпозиции магнитных полей следует (покажите это самостоятельно), что корректный учет этого замечания приводит к уменьшению индукции «действующего» поля самого цилиндра ровно в два раза. Таким образом, при вычислении давления следует заменить стандартное значение индукции поля рассматриваемого i -го цилиндра (1) на новое «эффективное» значение

$$B_i^* = \frac{\mu_0 \sigma_i \omega_i R_i}{2}. \quad (6)$$

Для уединенного цилиндра сила Ампера, действующая на рассматриваемый элемент $\Delta S_i = \Delta l_i \times \Delta l_j$ перпендикулярно его поверхности

$$F_A = I_\Sigma B^* \Delta l_i = \{I_\Sigma = i \Delta l_j = \sigma \omega R \Delta l_j\} = \sigma \omega R \Delta l_j B^* \Delta l_i = \mu_0 \frac{\sigma^2 \omega^2 R^2 \Delta l_j \Delta l_i}{2}, \quad (7)$$

создает давление

$$p = \frac{F_A}{\Delta S_i} = \mu_0 \frac{\sigma^2 \omega^2 R^2}{2}. \quad (8)$$

В нашем случае внешний цилиндр радиуса R_2 будет испытывать давление только со стороны «внутреннего» поля

$$p_2 = \mu_0 \frac{\sigma_2^2 \omega_2^2 R_2^2}{2}. \quad (9)$$

Внутренний цилиндр радиуса R_1 , соответственно, будет находиться под давлением

$$p_1 = \mu_0 \sigma_1 \omega_1 R_1 \left(\frac{\sigma_1 \omega_1 R_1}{2} + \sigma_2 \omega_2 R_2 \right). \quad (10)$$

Подчеркнем, что в случае вращения цилиндров в различных направлениях в выражениях (9) – (10) следует использовать знак «-».

11 класс.

Задание 11.1

1. В стационарном режиме плотность теплового потока остается постоянной во всех точках внутри пластины

$$q = -\beta \frac{\Delta T}{\Delta x} = const. \quad (1)$$

Из этого условия следует, что температура внутри пластины изменяется по линейному закону. Учитывая значения температур на противоположных сторонах пластины, можно записать

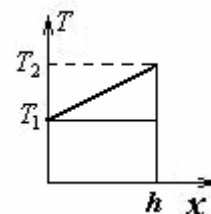
$$T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{h} x. \quad (2)$$

2. Пусть для определенности $T_2 > T_1$. Тогда до установления стационарного режима пластинка площади S должна поглотить количество теплоты

$$Q = c_1 \rho_1 S h \frac{(T_2 - T_1)}{2}. \quad (3)$$

Для получения оценки характерного времени установления теплового равновесия примем, что тепловой поток от более нагретой стороны пластины равен потоку в стационарном режиме, тогда за время τ пластинка получит количество теплоты, равное

$$Q = \beta_1 S \frac{T_2 - T_1}{h} \tau. \quad (4)$$

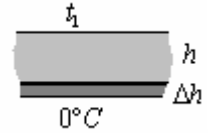


Приравнявая эти выражения, получим оценку времени установления равновесия

$$\tau_0 \approx \frac{c_1 \rho_1 h^2}{2\beta_1}. \quad (5)$$

Подставляя численные характеристики льда, получим $\tau_0 \approx 4 \cdot 10^4 \text{ с} \approx 11 \text{ час}$.

3. При замерзании (кристаллизации) льда выделяется некоторое количество теплоты, которое должно быть перенесено через имеющийся слой льда в окружающий воздух.



Будем считать, что в любой момент времени при любой толщине льда h распределение температуры внутри льда соответствует стационарному (справедливость этого предположения оценим далее). Пусть за малый промежуток времени $\Delta\tau$ толщина льда увеличилась на величину Δh , тогда уравнение теплового баланса будет иметь вид

$$\lambda \rho_1 S \Delta h = \beta_1 S \frac{\Delta t^\circ}{h} \Delta \tau, \quad (6)$$

где $\Delta t^\circ = -t_1$ разность температур между нижней и верхней границей льда.

Учитывая, что для малых интервалов $h \Delta h = \Delta \left(\frac{h^2}{2} \right)$ из уравнения (6) получим

$$\tau = \frac{\lambda \rho_1 h^2}{2\beta_1 \Delta t^\circ}. \quad (7)$$

Сравнивая это выражение с оценкой времени установления стационарного теплового потока (5), найдем отношение характерного времени установления стационарного режима ко времени намерзания $\frac{\tau_0}{\tau_1} = \frac{c_1 \Delta t^\circ}{\lambda} \approx 0,06$. Как следует из этого,

время намерзания более чем на порядок превышает время установления стационарного режима, что обосновывает сделанное приближение о квазистационарном потоке через толщу льда. Из соотношения (7) находим зависимость толщины льда от времени

$$h = \sqrt{\frac{2\beta_1 \Delta t^\circ}{\lambda \rho_1} \tau}. \quad (8)$$

Подстановка численных значений приводит к результату

$$h = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,2 \cdot 10}{3,3 \cdot 10^5 \cdot 0,90 \cdot 10^3}} \cdot 7 \cdot 24 \cdot 3600 \approx 30 \text{ см}.$$



4. При плавлении льда, теплота необходимая для плавления поступает от нагретого воздуха через слой воды посредством теплопередачи. Опять используем квазистационарное приближение. Обозначим толщину льда в произвольный момент времени $\tau - x$, а толщину слоя воды h . Используя условие сохранения воды, запишем равенство

$$\rho_1 x + \rho_0 h = \rho_1 h_0, \quad (9)$$

из которого следует

$$h = \frac{\rho_1}{\rho_0} (h_0 - x), \quad (10)$$

Пусть за время $\Delta\tau$ толщина льда уменьшилась на величину Δx , тогда уравнение теплового баланса будет иметь вид

$$\beta_0 \frac{t_1}{h} S \Delta \tau = -\lambda \rho_1 S \Delta x. \quad (11)$$

Из уравнений (10)-(11) с учетом начальных условий получим соотношение

$$\frac{(h_0 - x)^2}{2} = \frac{\beta_0 t_1 \rho_0}{\rho_1^2 \lambda} \tau, \quad (12)$$

из которого определим закон изменения толщины льда

$$x = h_0 - \sqrt{\frac{2\beta_0 t_1 \rho_0}{\rho_1^2 \lambda} \tau}, \quad (13)$$

и время плавления слоя льда

$$\tau = \frac{\rho_1^2 \lambda h_0^2}{2\beta_0 t_1 \rho_0} \approx 1,9 \cdot 10^2 \text{ с} \approx 22 \text{ суток}. \quad (14)$$

4. Так как нагрев воды осуществляется снизу, то благодаря конвекции, происходит ее быстрое перемешивание, поэтому можно считать, что температура воды одинакова во всех точках, обозначим эту температуру t . В такой ситуации теплота, поступающая от нагретой плиты, расходуется на плавление льда и нагрев образующейся талой воды. Уравнения теплового баланса для малого промежутка времени $\Delta \tau$ в этом случае имеют вид (Δx - по-прежнему изменение толщины льда за этот промежуток времени)

$$\gamma(t_1 - t)S\Delta \tau = \gamma(t - t_0)S\Delta \tau + c_0 \rho_1 S\Delta x(t - t_0), \quad (15)$$

$$\gamma(t - t_0)S\Delta \tau = \lambda \rho_1 S\Delta x. \quad (16)$$

Избавляясь от скорости плавления $\frac{\Delta x}{\Delta \tau}$, получим уравнение для определения температуры воды

$$t^2 + 2\frac{\lambda}{c_0}t - \frac{\lambda}{c_0}t_1 = 0,$$

из которого находим температуру воды $t = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{c_0}\right)^2 + \frac{\lambda}{c_0}t_1} - \frac{\lambda}{c_0} \approx 4,85^\circ\text{C}$, которая оказывается постоянной. Следовательно, и скорость плавления льда также постоянна

$$\frac{\Delta x}{\Delta \tau} = \frac{\gamma}{\lambda \rho_1}. \quad (17)$$

Поэтому толщина льда будет изменяться по линейному закону

$$x = h_0 - \frac{\gamma}{\lambda \rho_1} \tau, \quad (18)$$

а время плавления рассчитывается по формуле

$$\tau = \frac{\lambda \rho_1}{\gamma} h_0 \approx 1,5 \cdot 10^4 \text{ с} \approx 4,3 \text{ часа}. \quad (20)$$

Задание 11.2

Так как пластинки одинаковы, то сообщенный заряд q распределится между ними поровну. Электрическая сила, действующая на подвижную пластинку, может быть определена из очевидной цепочки равенств

$$F = E \frac{q}{2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{q}{2} = \frac{1}{2\epsilon_0} \cdot \frac{q}{2S} \cdot \frac{q}{2} = \frac{q^2}{8\epsilon_0 S}. \quad (1)$$

Эта постоянная сила отталкивания уравновешивается силой упругости пружинок

$$F = kx, \quad (2)$$

поэтому заряд прибора и смещением пружинок связаны соотношениями

$$x = \frac{q^2}{8\epsilon_0 Sk}; \quad q = \sqrt{8\epsilon_0 Skx}. \quad (3)$$

Минимальный заряд, который можно измерить с помощью данного прибора, равен

$$q_{\min} = \sqrt{8\varepsilon_0 S k \delta x} = 4,2 \cdot 10^{-10} \text{ Кл}, \quad (4)$$

а максимальный

$$q_{\max} = \sqrt{8\varepsilon_0 S k \Delta x} = 4,2 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}. \quad (5)$$

Относительная погрешность измерения заряда рассчитывается по формуле

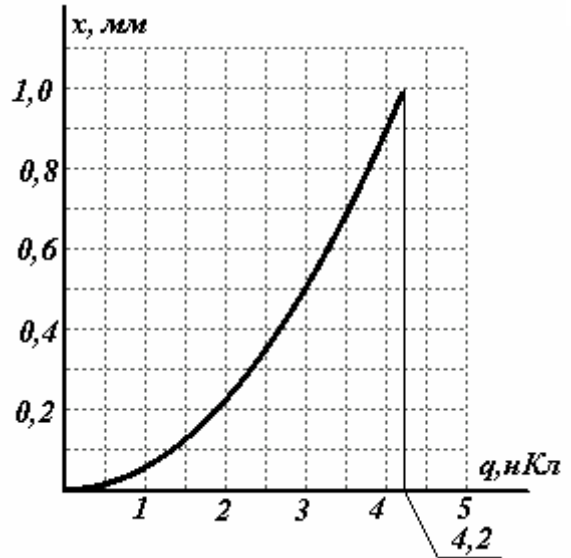
$$\frac{\Delta q}{q} = \frac{q'_x \delta x}{q} = \frac{\delta x}{2x}, \quad (7)$$

она минимальна при максимальном смещении пластинки, при котором составляет 0,5%.

График зависимости смещения пластинки от величины заряда представляет собой «банальную» параболу

$$x = 5,6 \cdot 10^{-2} q^2,$$

где x - измерена в миллиметрах, а q в нанокюломах.



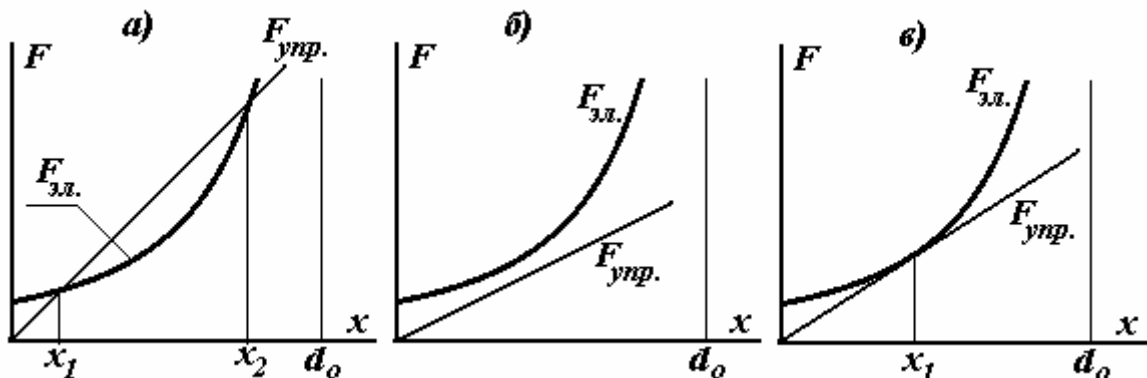
2. При заданном напряжении между пластиками при их относительном смещении измеряется заряд каждой из пластин. В этом случае силу электрического притяжения можно вычислить с помощью следующей цепочки

$$F = \sigma S \cdot \frac{E}{2} = \varepsilon_0 E S \cdot \frac{E}{2} = S \cdot \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 S}{2} \left(\frac{U}{d} \right)^2 = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2(d_0 - x)^2}. \quad (8)$$

Приравнивая ее к силе упругости пружин, получим уравнение, связывающее смещение пластинки и приложенное напряжение

$$\frac{\varepsilon_0 S U^2}{2(d_0 - x)^2} = kx. \quad (9)$$

Выразить из этого уравнения в явном виде x как функцию U , по меньшей мере, затруднительно. Проанализируем уравнение (9) графически, для чего построим графики зависимостей электрической силы и силы упругости от смещения пластинки.



Легко заметить, что в интересующем нас диапазоне $x \in [0, d_0]$ уравнение (9) может иметь либо два корня (а), либо один (в), либо ни одного корня (б).

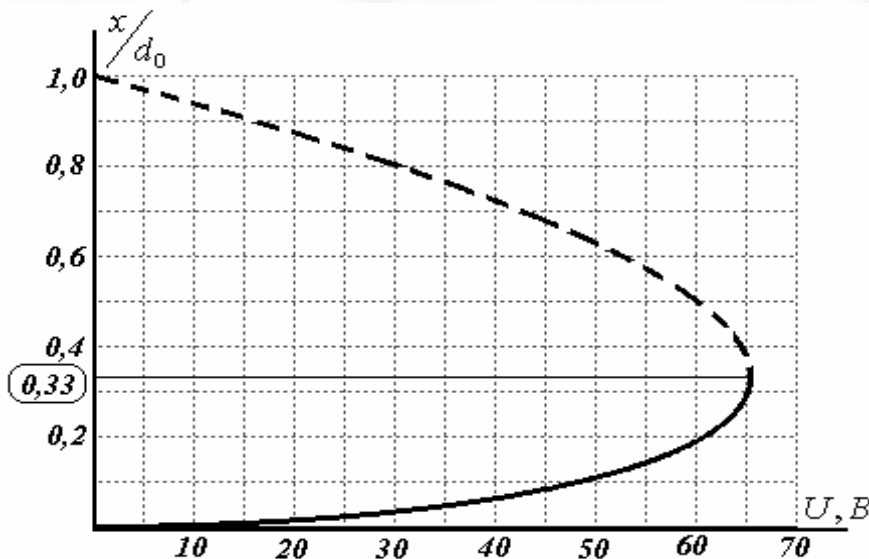
Традиционный анализ устойчивости (электрическая сила стремится увеличить смещение, а сила упругости – уменьшить), показывает, что в случае (а) устойчивым является меньший корень, в случае (в) – корень неустойчив. Отсутствие корней свидетельствует об отсутствии положения равновесия подвижной пластинки, то есть в этом случае никакие измерения невозможны.

Если сложно построить график зависимости $x(U)$, то можно построить зависимость $U(x)$! Выразим из уравнения (9)

$$U = \sqrt{\frac{2kd_0^3}{\varepsilon_0 S} \cdot \left(1 - \frac{x}{d_0}\right) \sqrt{\frac{x}{d_0}}}. \quad (10)$$

Обозначим $A = \sqrt{\frac{2kd_0^3}{\varepsilon_0 S}} \approx 170B$, $\xi = \frac{x}{d_0}$ и получим «совсем простую зависимость

$U = A(1-\xi)\sqrt{\xi}$. Построить график этой функции можно с помощью традиционных методов анализа функций. Результат такого построения показан на рисунке.



Как было отмечено выше, верхняя ветвь этой зависимости неустойчива, поэтому изображена пунктиром. Из анализа функции (10) следует, что максимальное напряжение, поддающееся измерению достигается при $\xi = 0,33$ и равно $U_{\max} \approx 65B$. Минимальное измеримое напряжение рассчитывается при подстановке в функцию (10) минимально измеримого $x = \delta x$. В этом случае $U_{\min} \approx 12B$.

Задание 11.3

а) При достаточно большом трении движение цилиндра по наклонной плоскости будет происходить без проскальзывания. При этом на него будут действовать три силы — тяжести $m\vec{g}$, реакции опоры \vec{N} и трения покоя \vec{F}_{mp} . Сила трения покоя при этом будет раскручивать цилиндр так, чтобы в любой момент времени скорость v его поступательного движения совпадала с линейной скоростью вращения

$$v = \omega R. \quad (1)$$

Соответственно полная кинетическая энергия катящегося без проскальзывания со скоростью v цилиндра будет складываться из энергий поступательного и вращательного движений (теорема Кёнига)

$$E_K = \frac{mv^2}{2} + \frac{m(\omega R)^2}{2} = mv^2. \quad (2)$$

Согласно закону равноускоренного движения

$$S = \frac{at^2}{2} = \frac{v^2}{2a} \Rightarrow v^2 = 2aS, \quad (3)$$

где a — искомое ускорение цилиндра.

С другой стороны, поскольку в системе нет тепловыделения, можем воспользоваться законом сохранения механической энергии

$$E_{II} = E_K \Rightarrow mgh = mgS \sin \alpha = mv^2 = \{(3)\} = 2aS m. \quad (4)$$

Из (4) находим ускорение цилиндра в случае отсутствия проскальзывания

$$a = \frac{g \sin \alpha}{2}. \quad (5)$$

Как следует из (5), ускорение цилиндра в этом случае в два раза меньше ускорения «свободного» скольжения по наклонной плоскости в отсутствие сил трения. Это обстоятельство (в совокупности с основным законом динамики) позволяет вычислить абсолютное значение силы трения покоя в данном случае

$$F_{mp} = \frac{mg \sin \alpha}{2}. \quad (6)$$

С помощью (6) количественно определим условие «достаточно большого трения», при котором может происходить движение без проскальзывания. Поскольку максимальное значение силы трения покоя совпадает с силой трения скольжения (явлением «застоя» пренебрежем), то

$$\frac{mg \sin \alpha}{2} \leq \mu N = \mu mg \cos \alpha \Rightarrow \mu \geq \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}. \quad (7)$$

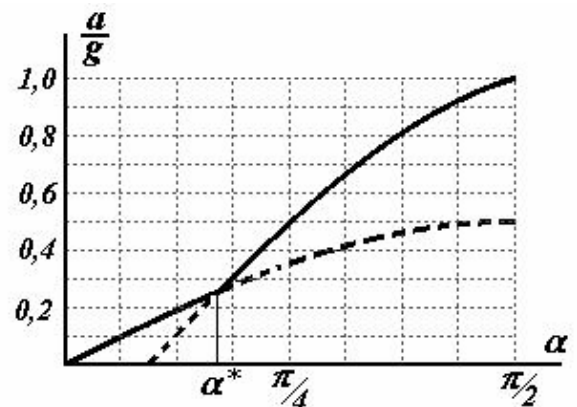
В случае недостаточного, «слабого» трения (при невыполнении условия (7)) сила трения уже «не будет успевать» раскручивать цилиндр до «нужной» угловой скорости (1). Соответственно, в системе начнется проскальзывание и, как следствие, тепловыделение. При этом, в соответствии с II законом Ньютона в проекции на наклонную плоскость, имеем

$$ma = mg \sin \alpha - \mu N = mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \Rightarrow a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha). \quad (8)$$

Искомая зависимость $a(\alpha)$ имеет вид

$$a = \begin{cases} \frac{g \sin \alpha}{2}, & \text{при } \alpha \leq \alpha^*, \alpha^* = \operatorname{arctg}(2\mu); \\ g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha), & \text{при } \alpha \geq \alpha^*. \end{cases} \quad (9)$$

График зависимости (9) изображен на рисунке.

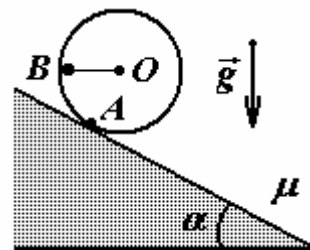


б) После прикрепления эксцентрика цилиндр сможет оставаться в равновесии на достаточно шероховатой наклонной плоскости, благодаря уравнивающему моменту силы тяжести эксцентрика относительно точки касания цилиндра и плоскости (точка А на рис.). При минимально возможной массе эксцентрика m_0 отрезок ОВ должен быть горизонтален. Тогда, записывая условия равенства моментов соответствующих сил тяжести относительно точки А, получим

$$m_0 g (R - R \sin \alpha) = mgR \sin \alpha \Rightarrow m_0 = \frac{\sin \alpha}{1 - \sin \alpha} m. \quad (10)$$

Первое условие равновесия (равенство нулю равнодействующей всех сил), приводит к очевидному требованию отсутствия скольжения по наклонной плоскости

$$\mu \geq \operatorname{tg} \alpha.$$



(11)

в) Положение равновесия будем определять углом отклонения отрезка между грузиком и центром от вертикали φ . Условие равновесия в этом случае будет иметь вид

$$mgR \sin \alpha = m_0 g R (\sin \varphi - \sin \alpha).$$

Выразим отсюда равновесный угол

$$\sin \varphi = \frac{m + m_0}{m_0} \sin \alpha.$$

Это уравнение на интервале $[0, 2\pi]$ имеет два корня, один из которых неустойчивый, поэтому единственным реализуемым положением равновесия является угол

$$\varphi = \arcsin \left(\frac{m + m_0}{m_0} \sin \alpha \right).$$

