

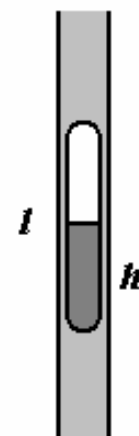
Условие

Задание 2. «Пробирка»

В длинной вертикальной цилиндрической трубке, заполненной водой, находится цилиндрическая пробирка, диаметр которой немного меньше внутреннего диаметра трубки. Толщина стенок пробирки пренебрежимо мала. Если пробирка пуста, то она равномерно поднимается со скоростью v_0 , если пробирку полностью заполнить водой, то она будет равномерно опускаться со скоростью v_1 .

1. Качественно объясните характер движения пробирки. Как изменятся указанные скорости движения, если взять пробирку такой же массы и такого же внешнего радиуса, но в два раза длиннее? 2. Найдите зависимость скорости пробирки от степени ее наполнения η водой (под степенью наполнения следует понимать отношение высоты заполненной части пробирки h к ее длине l : $\eta = \frac{h}{l}$). Постройте график этой зависимости.

3. Пробирку заполняют жидкостью, плотность которой в n раз больше плотности воды. Найдите зависимость скорости пробирки от степени ее наполнения этой жидкостью. Постройте график этой зависимости.



Решение

Задание 9.2

1. Во время движения на пробирку действуют сила тяжести, выталкивающая сила Архимеда и сила вязкого трения, пропорциональная скорости движения пробирки. Так как сила сопротивления пропорциональна скорости, то по прошествии малого промежутка времени пробирка будет двигаться с постоянной скоростью, которую можно найти из условия равновесия сил (положительное направление — вверх):

$$\rho V g - m_0 g - \rho_1 \eta V g = \beta v, \quad (1)$$

где ρ , ρ_1 — плотности воды и жидкости внутри пробирки, V — объем пробирки, m_0 — масса пустой пробирки, β — коэффициент пропорциональности между силой сопротивления и скоростью пробирки. Основная причина, приводящая к возникновению силы сопротивления — перетекание воды в узком слое между стенками трубки и пробирки, поэтому коэффициент β приблизительно пропорционален длине пробирки. Следовательно, если взять пробирку вдвое большей длины (при прочих равных условиях), то указанные скорости приблизительно уменьшатся в два раза.

2. Из уравнения (1) следует, что скорость установившегося движения пробирки линейно зависит от степени ее наполнения

$$v = A\eta + B, \quad (2)$$

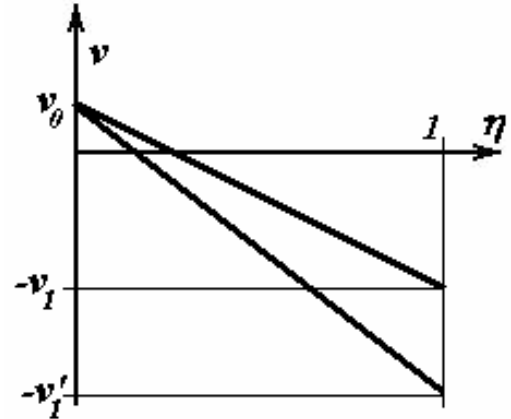
где A, B — постоянные коэффициенты, которые можно определить из двух известных скоростей. Окончательный вид зависимости скорости от степени наполнения имеет вид

$$v = -(v_0 + v_1)\eta + v_0. \quad (3)$$

3. Из уравнения (1) следует, что коэффициент при η , в линейной зависимости вида (2), пропорционален плотности налитой жидкости. Поэтому для другой жидкости зависимость скорости от степени наполнения будет иметь вид

$$v = -n(v_0 + v_1)\eta + v_0. \quad (4)$$

Графики этих зависимостей показаны на рисунке, где обозначена скорость движения пробирки, полностью заполненной другой жидкостью,



$$v'_1 = nv_1 + (n - 1)v_0.$$

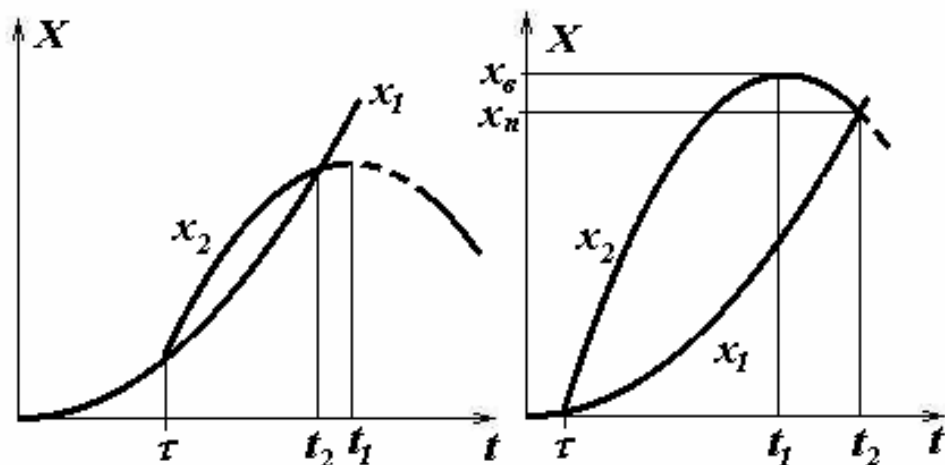
Задание 9.3

1. Законы движения платформы $x_1(t)$ и шарика $x_2(t)$ имеют вид

$$x_1 = \frac{at^2}{2}$$

$$x_2 = \frac{a\tau^2}{2} + (a\tau + v_0) \cdot (t - \tau) - \frac{g(t - \tau)^2}{2} \quad (1)$$

Здесь начало отсчета времени совмещено со стартом платформы, а начало отсчета вертикальной оси X находится на поверхности земли. Схематические графики законов движения показаны ниже на рисунке.



Следует отметить, что в данной задаче следует рассмотреть два варианта: - до падения на платформу шарик успевает достичь верхней точки траектории свободного движения; - платформа догоняет шарик, который продолжает двигаться вверх. Для упрощения дальнейших расчетов совместим начало отсчета координат с точкой, в которой был брошен шарик, с этим же моментом свяжем начало отсчета времени. В такой системе отсчета законы движения имеют вид

$$\begin{aligned} x_1 &= a\tau \cdot t + \frac{at^2}{2} \\ x_2 &= (a\tau + v_0) \cdot t - \frac{gt^2}{2} \end{aligned} \quad (2)$$

Определим момент времени падения шарика на платформу t_2 , для чего следует решить уравнение $x_1(t_2) = x_2(t_2)$. Решение этого уравнения выражается формулой

$$t_2 = \frac{2v_0}{a + g}. \quad (3)$$

При свободном движении шарика в верхней точке его скорость обращается в нуль, что позволяет найти этот момент времени. Так как скорость шарика изменяется по закону $v_2 = (a\tau + v_0) - gt$, то скорость шарика может обратиться в нуль при

$$t_1 = \frac{a\tau + v_0}{g}. \quad (4)$$

Итак, шарик не успеет достичь верхней точки своей траектории свободного движения при выполнении условия $t_1 > t_2$, или при следующем соотношении между исходными параметрами

$$v_0 < a\tau \frac{g+a}{g-a}. \quad (5)$$

В этом случае модуль перемещения и пройденный путь равны и могут быть найдены как координата точки падения шарика на платформу

$$x_n = x_1(t_2) = x_2(t_2) = \frac{2v_0a}{a+g} \cdot \left(\tau + \frac{v_0}{a+g} \right). \quad (6)$$

Если же неравенство (5) не выполняется, то пройденный путь будет превышать модуль перемещения (который, по-прежнему, определяется формулой (6)). Как легко увидеть из графиков законов движения, в этом случае пройденный путь равен

$$S = x_n + 2(x_{\text{в}} - x_n), \quad (7)$$

где $x_{\text{в}}$ - координата верхней точки траектории, которая в свою очередь легко определима

$$x_{\text{в}} = \frac{(a\tau + v_0)^2}{2g}. \quad (8)$$

Итак, окончательно получим выражения для пройденного пути

$$S = \frac{(a\tau + v_0)^2}{g} - \frac{2v_0a}{a+g} \cdot \left(\tau + \frac{v_0}{a+g} \right). \quad (9)$$