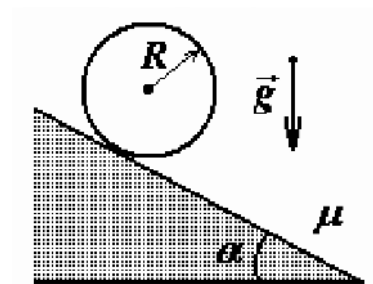


Условие

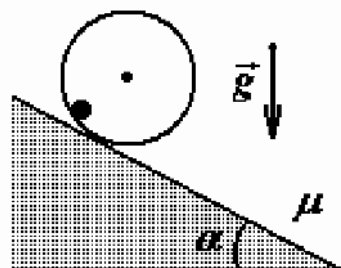
Задание 3. «Кольцо на наклонной плоскости»



Однородный тонкостенный цилиндр радиуса R и массы m кладут на наклонную плоскость, образующую угол α с горизонтом. Коэффициент трения цилиндра о наклонную плоскость — μ .

а) Найдите зависимость ускорения $a(\alpha)$ цилиндра от угла наклона плоскости α . Рассмотрите случаи движения цилиндра без проскальзывания и с проскальзыванием. Схематично постройте график полученной зависимости.

б) Если к ободу цилиндра с его внутренней стороны прикрепить небольшой эксцентрик массы m_0 , то цилиндр при некоторых условиях сможет оставаться в состоянии равновесия на наклонной плоскости. Найдите эти условия. Укажите, в каком положении может находиться в равновесии описанная система при различных значениях m_0 .



Трением качения пренебречь.

Экспериментальные задачи.

Решение

Задание 11.3

а) При достаточно большом трении движение цилиндра по наклонной плоскости будет происходить без проскальзывания. При этом на него будут действовать три силы — тяжести $m\vec{g}$, реакции опоры $\vec{N}$ и трения покоя $\vec{F}_{\text{тр}}$. Сила трения покоя при этом будет раскручивать цилиндр так, чтобы в любой момент времени скорость v его поступательного движения совпадала с линейной скоростью вращения

$$v = \omega R. \quad (1)$$

Соответственно полная кинетическая энергия катящегося без проскальзывания со скоростью v цилиндра будет складываться из энергий поступательного и вращательного движений (теорема Кёнига)

$$E_K = \frac{mv^2}{2} + \frac{m(\omega R)^2}{2} = mv^2. \quad (2)$$

Согласно закону равноускоренного движения

$$S = \frac{at^2}{2} = \frac{v^2}{2a} \Rightarrow v^2 = 2aS, \quad (3)$$

где a — искомое ускорение цилиндра. С другой стороны, поскольку в системе нет тепловыделения, можем воспользоваться законом сохранения механической энергии

$$E_{\Pi} = E_K \Rightarrow mgh = mgS \sin \alpha = mv^2 = \{(3)\} = 2aSm. \quad (4)$$

Из (4) находим ускорение цилиндра в случае отсутствия проскальзывания

$$a = \frac{g \sin \alpha}{2}. \quad (5)$$

Как следует из (5), ускорение цилиндра в этом случае в два раза меньше ускорения «свободного» скольжения по наклонной плоскости в отсутствие сил трения. Это обстоятельство (в совокупности с основным законом динамики) позволяет вычислить абсолютное значение силы трения покоя в данном случае

$$F_{\text{тр}} = \frac{mg \sin \alpha}{2}. \quad (6)$$

С помощью (6) количественно определим условие «достаточно большого трения», при котором может происходить движение без проскальзывания. Поскольку максимальное значение силы трения покоя совпадает с силой трения скольжения (явлением «застоя» пренебрежем), то

$$\frac{mg \sin \alpha}{2} \leq \mu N = \mu mg \cos \alpha \Rightarrow \mu \geq \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}. \quad (7)$$

В случае недостаточного, «слабого» трения (при невыполнении условия (7)) сила трения уже «не будет успевать» раскручивать цилиндр до «нужной» угловой скорости (1). Соответственно, в системе начнется проскальзывание и, как следствие, тепловыделение. При этом, в соответствии с II законом Ньютона в проекции на наклонную плоскость, имеем

$$ma = mg \sin \alpha - \mu N = mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \Rightarrow a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha). \quad (8)$$

Искомая зависимость $a(\alpha)$ имеет вид

$$a = \begin{cases} \frac{g \sin \alpha}{2}, & \text{при } \alpha \leq \alpha^*, \alpha^* = \arctg(2\mu); \\ g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha), & \text{при } \alpha \geq \alpha^*. \end{cases} \quad (9)$$

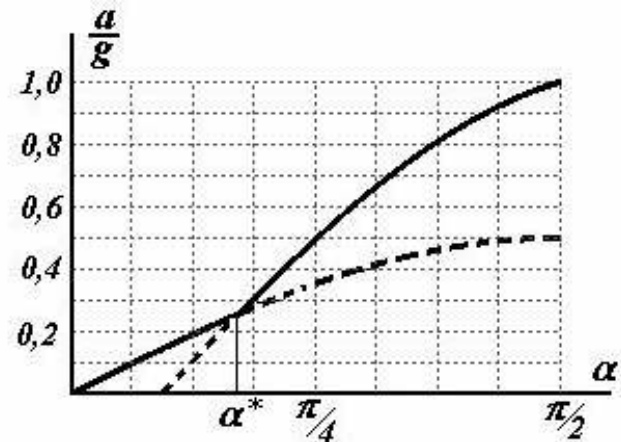
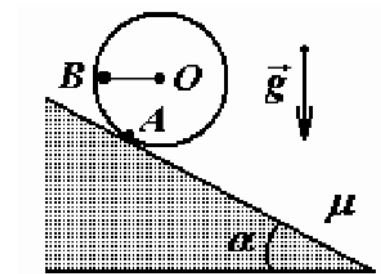


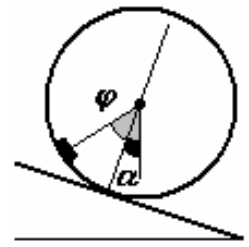
График зависимости (9) изображен на рисунке. б) После прикрепления эксцентрика цилиндр сможет оставаться в равновесии на достаточно шероховатой наклонной плоскости, благодаря уравновешивающему моменту силы тяжести эксцентрика относительно точки касания цилиндра и плоскости (точка А на рис.). При минимально возможной массе эксцентрика m_0 отрезок ОВ должен быть горизонтален. Тогда, записывая условия равенства моментов соответствующих сил тяжести относительно точки А, получим



$$m_0 g (R - R \sin \alpha) = m g R \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad m_0 = \frac{\sin \alpha}{1 - \sin \alpha} m. \quad (10)$$

Первое условие равновесия (равенство нулю равнодействующей всех сил), приводит к очевидному требованию отсутствия скольжения по наклонной плоскости

$$\mu \geq \operatorname{tg} \alpha. \quad (11)$$



в) Положение равновесия будем определять углом отклонения отрезка между грузиком и центром от вертикали φ . Условие равновесия в этом случае будет иметь вид

$$mgR \sin \alpha = m_0 g R (\sin \varphi - \sin \alpha).$$

Выразим отсюда равновесный угол

$$\sin \varphi = \frac{m + m_0}{m_0} \sin \alpha.$$

Это уравнение на интервале $[0, 2\pi]$ имеет два корня, один из которых неустойчивый, поэтому единственным реализуемым положением равновесия является угол

$$\varphi = \arcsin \left(\frac{m + m_0}{m_0} \sin \alpha \right).$$