

Условие

Задание 1. «Архимед»

Тяжело проводить физические эксперименты, не имея дорогостоящего оборудования! В этом году нам помогли спонсоры, что и позволило предложить Вам следующую задачу.

Оборудование: лист бумаги формата А3, линейка пластмассовая 40см, карандаш круглый, скрепки канцелярские.

Используя имеющееся оборудование, измерьте:

1. Коэффициент трения грифеля карандаша о бумагу.
2. Коэффициент трения скрепки о линейку.
3. Массу линейки (в *скрп*).
4. Толщину листа бумаги.
5. Поверхностную плотность бумаги (в $\frac{\text{скрп}}{\text{м}^2}$).
6. Плотность бумаги (в $\frac{\text{скрп}}{\text{м}^3}$).

Примечание

В качестве единицы массы используйте массу одной скрепки (иными словами считайте скрепку эталоном массы), называем эту единицу – *скрп*.

Решение

Задание 11.1***

1. В стационарном режиме плотность теплового потока остается постоянной во всех точках внутри пластины

$$q = -\beta \frac{\Delta T}{\Delta x} = \text{const.} \quad (1)$$

Из этого условия следует, что температура внутри пластины изменяется по линейному закону. Учитывая значения температур на противоположных сторонах пластины, можно записать

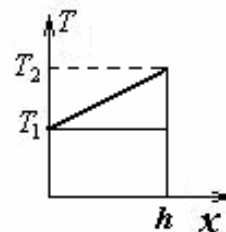
$$T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{h}x. \quad (2)$$

2. Пусть для определенности $T_2 > T_1$. Тогда до установления стационарного режима пластинка площади S должна поглотить количество теплоты

$$Q = c_1 \rho_1 S h \frac{(T_2 - T_1)}{2}. \quad (3)$$

Для получения оценки характерного времени установления теплового равновесия примем, что тепловой поток от более нагретой стороны пластины равен потоку в стационарном режиме, тогда за время τ пластинка получит количество теплоты, равное

$$Q = \beta_1 S \frac{T_2 - T_1}{h} \tau. \quad (4)$$



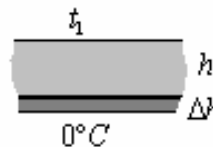
Приравнивая эти выражения, получим оценку времени установления равновесия

$$\tau_0 \approx \frac{c_1 \rho_1 h^2}{2\beta_1}. \quad (5)$$

Подставляя численные характеристики льда, получим $\tau_0 \approx 4 \cdot 10^4 \text{ с} \approx 11 \text{ час}$.

3. При замерзании (кристаллизации) льда выделяется некоторое количество теплоты, которое должно быть перенесено через имеющийся слой льда в окружающий воздух.

Будем считать, что в любой момент времени при любой толщине льда h распределение температуры внутри льда соответствует стационарному (справедливость этого предположения оценим далее). Пусть за малый промежуток времени $\Delta\tau$ толщина льда увеличилась на величину Δh , тогда уравнение теплового баланса будет иметь вид



$$\lambda \rho_1 S \Delta h = \beta_1 S \frac{\Delta t^\circ}{h} \Delta \tau, \quad (6)$$

где $\Delta t^\circ = -t_1$ разность температур между нижней и верхней границей льда.

Учитывая, что для малых интервалов $h \Delta h = \Delta \left(\frac{h^2}{2} \right)$ из уравнения (6) получим

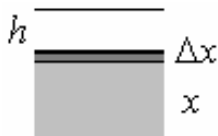
$$\tau = \frac{\lambda \rho_1 h^2}{2\beta_1 \Delta t^\circ}. \quad (7)$$

Сравнивая это выражение с оценкой времени установления стационарного теплового потока (5), найдем отношение характерного времени установления стационарного режима ко времени намерзания $\frac{\tau_0}{\tau_1} = \frac{c_1 \Delta t^\circ}{\lambda} \approx 0,06$. Как следует из этого, время намерзания более чем на порядок превышает время установления стационарного режима, что обосновывает сделанное приближение о квазистационарном потоке через толщу льда. Из соотношения (7) находим зависимость толщины льда от времени

$$h = \sqrt{\frac{2\beta_1 \Delta t^\circ}{\lambda \rho_1} \tau}. \quad (8)$$

Подстановка численных значений приводит к результату

$$h = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,2 \cdot 10}{3,3 \cdot 10^5 \cdot 0,90 \cdot 10^3} \cdot 7 \cdot 24 \cdot 3600} \approx 30 \text{ см}.$$



4. При плавлении льда, теплота необходимая для плавления поступает от нагретого воздуха через слой воды посредством теплопередачи. Опять используем квазистационарное приближение. Обозначим толщину льда в произвольный момент времени $\tau - x$, а толщину слоя воды h . Используя условие сохранения воды, запишем равенство

$$\rho_1 x + \rho_0 h = \rho_1 h_0, \quad (9)$$

из которого следует

$$h = \frac{\rho_1}{\rho_0}(h_0 - x), \quad (10)$$

Пусть за время $\Delta\tau$ толщина льда уменьшилась на величину Δx , тогда уравнение теплового баланса будет иметь вид

$$\beta_0 \frac{t_1}{h} S \Delta\tau = -\lambda \rho_1 S \Delta x. \quad (11)$$

Из уравнений (10)-(11) с учетом начальных условий получим соотношение

$$\frac{(h_0 - x)^2}{2} = \frac{\beta_0 t_1 \rho_0}{\rho_1^2 \lambda} \tau, \quad (12)$$

из которого определим закон изменения толщины льда

$$x = h_0 - \sqrt{\frac{2\beta_0 t_1 \rho_0}{\rho_1^2 \lambda} \tau}, \quad (13)$$

и время плавления слоя льда

$$\tau = \frac{\rho_1^2 \lambda h_0^2}{2\beta_0 t_1 \rho_0} \approx 1,9 \cdot 10^2 c \approx 22 \text{ суток}. \quad (14)$$

4. Так как нагрев воды осуществляется снизу, то благодаря конвекции, происходит ее быстрое перемешивание, поэтому можно считать, что температура воды одинакова во всех точках, обозначим эту температуру t . В такой ситуации теплота, поступающая от нагретой плиты, расходуется на плавление льда и нагрев образующейся талой воды. Уравнения теплового баланса для малого промежутка времени $\Delta\tau$ в этом случае имеют вид (Δx - по-прежнему изменение толщины льда за этот промежуток времени)

$$\begin{aligned} \gamma(t_1 - t) S \Delta\tau &= \gamma(t - t_0) S \Delta\tau + c_0 \rho_1 S \Delta x (t - t_0), \\ \gamma(t - t_0) S \Delta\tau &= \lambda \rho_1 S \Delta x. \end{aligned} \quad (15)$$

$$(16)$$

Избавляясь от скорости плавления $\frac{\Delta x}{\Delta\tau}$, получим уравнение для определения температуры воды

$$t^2 + 2\frac{\lambda}{c_0}t - \frac{\lambda}{c_0}t_1 = 0,$$

из которого находим температуру воды $t = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{c_0}\right)^2 + \frac{\lambda}{c_0}t_1 - \frac{\lambda}{c_0}} \approx 4,85^\circ\text{C}$, которая оказывается постоянной. Следовательно, и скорость плавления льда также постоянна

$$\frac{\Delta x}{\Delta \tau} = \frac{\gamma t}{\lambda \rho_1}. \quad (17)$$

Поэтому толщина льда будет изменяться по линейному закону

$$x = h_0 - \frac{\gamma t}{\lambda \rho_1} \tau, \quad (18)$$

а время плавления рассчитывается по формуле

$$\tau = \frac{\lambda \rho_1}{\gamma t} h_0 \approx 1,5 \cdot 10^4 \text{ c} \approx 4,3 \text{ часа}. \quad (20)$$