

Условие

Задание 4. «Вращающиеся цилиндры» Два коаксиальных (имеющих общую ось OO') достаточно длинных цилиндра, радиусами R_1 и R_2 вращаются с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 . Цилиндры заряжены с поверхностными плотностями σ_1 и σ_2 соответственно. 1) Найдите зависимость индукции $B(r)$ магнитного поля от расстояния r до оси системы, постройте график полученной зависимости. 2) Найдите величину давления на поверхность каждого из цилиндров со стороны магнитного поля.

Решение

Задание 10.4

а) Рассмотрим процесс возникновения магнитного поля при вращении цилиндров.

Индукция B однородного магнитного поля внутри достаточно длинного соленоида с однослойной плотностью намотки $n = \frac{N}{l}$ и силой тока I может быть найдена по формуле

$$B = \mu_0 i = \left\{ i = \frac{I_{\Sigma}}{l} = \frac{IN}{l} = In \right\} = \mu_0 In . \quad (1)$$

Подчеркнем, что вне бесконечного соленоида поля нет. В реальном случае магнитное поле выходит через торцы соленоида (область т.н. «краевых эффектов»), следовательно, оно отлично от нуля и вне соленоида. Поскольку цилиндры, согласно условию, достаточно длинные, то указанными эффектами пренебрежем.

В рассматриваемом случае ток, в буквальном смысле слова, через цилиндры не течет, однако его заменяет направленное движение статических зарядов на поверхностях цилиндров при вращении. За один оборот весь заряд $q = \sigma 2\pi Rl$ цилиндра пройдет через некоторое фиксированное поперечное сечение его боковой поверхности длиной l . Следовательно, сила тока, «протекающего» по поверхности цилиндра радиуса R при его вращении с угловой скоростью ω

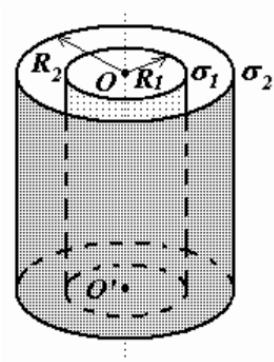
$$I = \frac{q}{t} = \frac{\sigma 2\pi Rl}{2\pi/\omega} = \sigma \omega Rl . \quad (2)$$

Соответственно для линейной плотности тока в этом случае получаем выражение

$$i = \frac{I}{l} = \sigma \omega R . \quad (3)$$

С помощью (1) - (3) и найдем индукцию B однородного магнитного поля внутри достаточно длинного вращающегося цилиндра

$$B = \mu_0 \sigma \omega R . \quad (4)$$



Направление вектора $\vec{B}$ магнитной индукции внутри цилиндра можно найти при помощи правила буравчика. При этом следует направление тока заменить направлением вращения цилиндра (при положительной плотности поверхностного заряда σ).

Таким образом, при вращении цилиндров в одном направлении, искомая зависимость имеет вид

$$B(r) = \begin{cases} \mu_0(\sigma_1\omega_1 R_1 + \sigma_2\omega_2 R_2) & \text{при } r < R_1 \\ \mu_0\sigma_2\omega_2 R_2 & \text{при } R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{при } r > R_2 \end{cases}. \quad (5)$$

При вращении цилиндров в различных направлениях в представленной зависимости, в соответствие с правилом буравчика следует взять знак «-».

б) Для вычисления давления, создаваемого магнитным полем вращающегося цилиндра на его же боковую поверхность цилиндра следует учесть, что на выделенный элемент с током ΔS_i боковой поверхности цилиндра не может действовать магнитное поле,

создаваемое им самим. Из принципа суперпозиции магнитных полей следует (покажите это самостоятельно), что корректный учет этого замечания приводит к уменьшению индукции «действующего» поля самого цилиндра ровно в два раза. Таким образом, при вычислении давления следует заменить стандартное значение индукции поля рассматриваемого i -го цилиндра (1) на новое «эффективное» значение

$$B_i^* = \frac{\mu_0\sigma_i\omega_i R_i}{2}. \quad (6)$$

Для уединенного цилиндра сила Ампера, действующая на рассматриваемый элемент $\Delta S_i = \Delta l_i \times \Delta l_j$ перпендикулярно его поверхности

$$F_A = I_\Sigma B^* \Delta l_i = \{I_\Sigma = i \Delta l_j = \sigma \omega R \Delta l_j\} = \sigma \omega R \Delta l_j B^* \Delta l_i = \mu_0 \frac{\sigma^2 \omega^2 R^2 \Delta l_j \Delta l_i}{2}, \quad (7)$$

создает давление

$$p = \frac{F_A}{\Delta S_i} = \mu_0 \frac{\sigma^2 \omega^2 R^2}{2}. \quad (8)$$

В нашем случае внешний цилиндр радиуса R_2 будет испытывать давление только со стороны «внутреннего» поля

$$p_2 = \mu_0 \frac{\sigma_2^2 \omega_2^2 R_2^2}{2}. \quad (9)$$

Внутренний цилиндр радиуса R_1 , соответственно, будет находиться под давлением

$$p_1 = \mu_0 \sigma_1 \omega_1 R_1 \left(\frac{\sigma_1 \omega_1 R_1}{2} + \sigma_2 \omega_2 R_2 \right). \quad (10)$$

Подчеркнем, что в случае вращения цилиндров в различных направлениях в выражениях (9) – (10) следует использовать знак «-».