

## Витебск, 2003г. Решения задач.

### 9 класс.

#### **Задача 1.**

Основная ошибка, допущенная «изобретателем», заключалась в том, что он не учел электрического сопротивления контакта между трубками.

Если пренебречь этим сопротивлением, то общее сопротивление резистора рассчитывается по формуле

$$\begin{aligned} R_{\text{теор.}} &= \rho \left( \frac{L_1 - x}{S_1} + \frac{x}{S_1 + S_2} + \frac{L_2 - x}{S_2} \right) = \\ &= \rho \left( \frac{L_1}{S_1} + \frac{L_2}{S_2} \right) - \rho \left( \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_1 + S_2} + \frac{1}{S_2} \right) x, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $L_1, L_2$  - длины трубок,  $S_1, S_2$  - площади их торцов,  $\rho$  - удельное электрическое сопротивление материала трубок. Как видно, эта зависимость действительно линейна.

Если же сопротивление контакта значительно превышает сопротивления самих трубок, то зависимость сопротивления от величины  $x$  будет иной (электрический ток по смазке протекает перпендикулярно поверхности трубок)

$$R_{\text{эсп.}} = \rho_1 \frac{h}{2\pi r x}, \quad (2)$$

где  $h$  - ширина зазора между трубками,  $r$  - внешний радиус внутренней трубки,  $\rho_1$  - удельное электрическое сопротивление смазки. Эта зависимость обратно пропорциональная.

#### **Задача 2.**

Запишем основной закон динамики для каждого из грузов в проекции на вертикальную ось с учетом условий невесомости нити и блоков, а также отсутствия трения в осях блоков:

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= T \\ m_2 a_2 &= T \\ m_0 a_0 &= m_0 g - 2T \end{aligned}, \quad (1)$$

Все обозначения стандартные и очевидные. Поскольку трение грузов о плоскость отсутствует, то в горизонтальном направлении система является замкнутой, т.е. положение ее центра масс не может измениться по горизонтали. С учетом этого получаем следующее уравнение

$$m_1 a_1 = m_2 a_2. \quad (2)$$

Кроме того, учтем кинематическую связь между ускорениями грузов для подвижного блока

$$a_1 + a_2 = 2a_0. \quad (3)$$

Выразив из (2) - (3) значения  $a_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} a_0$  ;  $a_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} a_0$  и

подставив их в (1) найдем

$$T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2} a_0 ;$$

$$a_0 = \frac{m_0(m_1 + m_2)}{m_0(m_1 + m_2) + 4m_1m_2} g = 0,16g = 1,6 \frac{M}{c^2} ;$$

$$a_1 = \frac{2m_0m_2}{m_0(m_1 + m_2) + 4m_1m_2} g = 0,19g = 1,9 \frac{M}{c^2} ;$$

$$a_2 = \frac{2m_0m_1}{m_0(m_1 + m_2) + 4m_1m_2} g = 0,13g = 1,3 \frac{M}{c^2} .$$

Зная ускорения всех грузов, найдем их скорости через время  $\tau$  после начала движения системы

$$v_0 = a_0 \cdot \tau = 0,35 \frac{M}{c} = 35 \frac{CM}{c} ;$$

$$v_1 = a_1 \cdot \tau = 0,42 \frac{M}{c} = 42 \frac{CM}{c} ;$$

$$v_2 = a_2 \cdot \tau = 0,28 \frac{M}{c} = 28 \frac{CM}{c} .$$

Для нахождения угловой скорости  $\omega$  вращения блока 3 заметим, что поскольку веревка нерастяжима, то скорости движения  $v_1$  и  $v_2$  могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0 + \omega \cdot r \\ v_2 &= v_0 - \omega \cdot r \end{aligned} \quad (4)$$

где  $r$  — радиус блока. Из (4) находим

$$\omega = \frac{v_1 - v_2}{2r} = 3,0 \frac{рад}{c} .$$

### Задача 3.

Пусть в некоторый момент времени<sup>1</sup>  $\tau$  длина отвердевшей части равна  $x = v\tau$ . За последующий малый промежуток времени  $\Delta t$  в ходе кристаллизации выделится количество теплоты

$$\Delta q = \lambda \rho a h \Delta x = \lambda \rho a h v \Delta t , \quad (1)$$

где  $\rho$  - плотность вещества в грелке. Эта теплота пойдет на нагревание как жидкой, так и отвердевшей части содержимого грелки на  $\Delta t$  градусов. Поэтому это же количество теплоты можно выразить с помощью известных формул

$$\Delta q = (C_0 \rho a h (l - x) + C_0 (1 - \eta) \rho a h x) \Delta t . \quad (2)$$

Обратите внимание, что суммарная теплоемкость грелки зависит от соотношения жидкой и отвердевшей части вещества, следовательно, и от времени. Из уравнения теплового баланса

$$(C_0 \rho a h (l - x) + C_0 (1 - \eta) \rho a h x) \Delta t = \rho a h v \Delta \tau \quad (3)$$

следует, что скорость изменения температуры сложным образом зависит от времени (очевидно, что  $x = v\tau$ ):

$$\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{\lambda v}{C_0 (l - \eta v \tau)} . \quad (4)$$

<sup>1</sup> Мы используем для обозначения времени символ  $\tau$ , что бы не путать с температурой  $t$ .

Для упрощения последнего выражения воспользуемся приближенной формулой, приведенной в условии задачи,

$$\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{\lambda v}{C_0(l - \eta v \tau)} = \frac{\lambda v}{C_0 l \left(1 - \frac{\eta v \tau}{l}\right)} \approx \frac{\lambda v}{C_0 l} \left(1 + \frac{\eta v \tau}{l}\right) = \frac{\lambda v}{C_0 l} + \frac{\lambda v^2 \eta}{C_0 l^2} \tau. \quad (5)$$

Таким образом, скорость изменения температуры линейно зависит от времени. Эта зависимость полностью аналогична зависимости скорости движения при равноускоренном движении. Используя эту математическую аналогию, можем записать закон изменения температуры со временем

$$t = t_0 + \frac{\lambda v}{C_0 l} \tau + \frac{\lambda v^2 \eta}{C_0 l^2} \cdot \frac{\tau^2}{2}. \quad (6)$$

Еще раз отметим, что нелинейная (квадратичная) зависимость температуры от времени связана с изменением теплоемкости системы.

Максимальная температура может быть определена из последнего выражения, полагая в нем  $\tau = \frac{l}{v}$ ,

$$t_{max} = t_0 + \frac{\lambda}{C_0} \left(1 + \frac{\eta}{2}\right). \quad (7)$$

#### Задача 4.

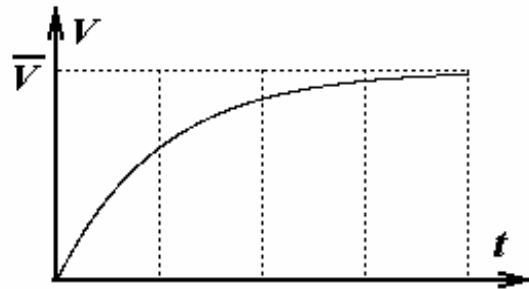
1. Уравнение второго закона Ньютона для движения в вязкой среде имеет в данном случае вид

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = F_0 - \beta_1 v. \quad (1)$$

Из этого уравнения следует, что ускорение изменяется с течением времени, причем с ростом скорости ускорение уменьшается. При достижении равенства силы сопротивления и силы  $F_0$ , ускорение обращается в нуль. Следовательно, скорость установившегося движения  $\bar{V}$  определяется соотношением

$$\bar{V} = \frac{F_0}{\beta_1}. \quad (2)$$

Качественный вид зависимости скорости от времени показан на рисунке.



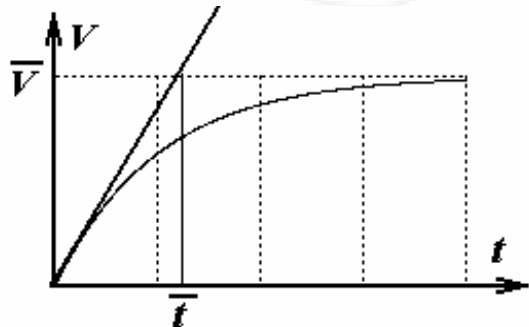
Для оценки времени достижения установившейся скорости, положим, что тело движется с постоянным ускорением (равным ускорению в начальный момент

времени  $a_0 = \frac{F_2}{m}$ ) до тех пор, пока

скорость не достигнет значения (2):

$$\bar{t} = \frac{\bar{V}}{a_0} = \frac{m}{\beta_1}. \quad (3)$$

Этот способ получения оценки проиллюстрирован на следующем рисунке.



Отметим, что рассматриваемая зависимость точно описывается функцией

$$v = \frac{F_0}{\beta_1} (1 - \exp(-\beta_1 t)).$$

2. Рассмотрение этой части задачи полностью аналогично предыдущей:

- уравнение движения

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = F_0 - \beta_2 v^2; \quad (4)$$

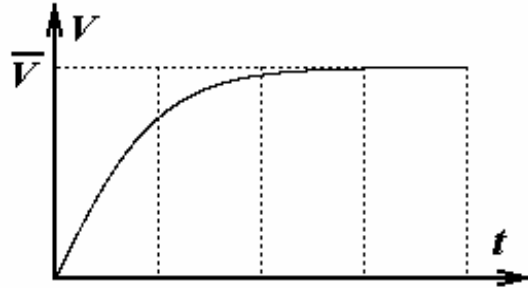
- скорость установившегося движения

$$\bar{V} = \sqrt{\frac{F_0}{\beta_2}}. \quad (5)$$

- графика зависимости скорости от времени качественно не отличается от рассмотренного ранее;

- время достижения установившейся скорости (обратите внимание - в этом случае это время зависит от действующей силы)

$$\bar{t} = \frac{\bar{V}}{a_0} = \frac{m}{\sqrt{F_0 \beta_2}}. \quad (6)$$



Отметим, что в данном зависимости скорости от времени точно описывается функцией

$$v = \sqrt{\frac{F_0}{\beta_2}} \cdot \frac{1 - \exp(t - \alpha t)}{1 + \exp(-\alpha t)}, \text{ где } \alpha = 2 \frac{\sqrt{F_0 \beta_2}}{m}.$$

3. Сила сопротивления возникает из-за столкновений поршня с движущимися частицами, которые сообщают поршню импульс.

Рассмотрим случай малой скорости поршня  $V < u$ . О переднюю грань поршня ударятся частицы, которые движутся навстречу поршню, число этих столкновений за промежуток времени  $\Delta t$  рассчитывается по формуле

$$v_+ = \frac{1}{2} n S (V + u) \Delta t. \quad (7)$$

В результате столкновения проекция скорость частицы на направление движения поршня изменяется от  $-u$  до  $(u + 2V)$  - это утверждение легко доказать перейдя в систему отсчета, связанную с поршнем. Итак, в результате одного столкновения поршень получит импульс

$$p = m(u + 2V + u) = 2m(u + V). \quad (8)$$

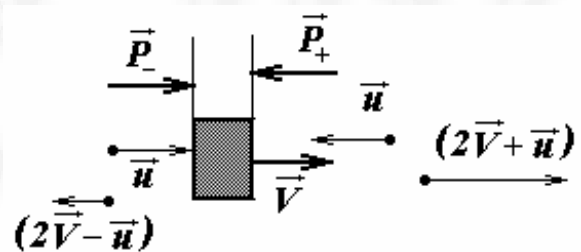
Следовательно, полный импульс, полученный передней гранью поршня, равен

$$P_+ = v_+ p = mnS(u + V)^2 \Delta t. \quad (9)$$

Аналогично, можно подсчитать импульс, который получит поршень, от частиц, которые ударяются о заднюю грань поршня (разумеется, это частицы, догоняющие поршень)

$$P_- = mnS(u - V)^2 \Delta t. \quad (10)$$

Таким образом, полный импульс, полученный поршнем равен разности



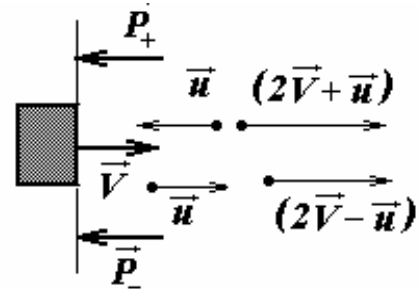
$$P = P_+ - P_- = mnS\Delta t((u+V)^2 - (u-V)^2) = 4mnS\Delta t uV. \quad (11)$$

Учитывая, что действующая сила равна импульсу, полученному в единицу времени, получим выражение для силы сопротивления

$$F_{\text{сопр.}} = \frac{P}{\Delta} = 4mnSuV. \quad (12)$$

Как видно, в рассмотренной модели сила сопротивления прямо пропорциональна скорости движения поршня.

В случае больших скоростей  $V > u$ , следует учесть, что передняя грань поршня будет сталкиваться не только с частицами, которые движутся ему навстречу, но и частицами движущимися в том же направлении, что и поршень (который их догоняет). Столкновений же с задней гранью не будет. В остальном же расчет переданного импульса остается прежним и приводит к результату



$$P = P_+ + P_- = mnS\Delta t((u+V)^2 + (u-V)^2) = 2mnS\Delta t(u^2 + V^2). \quad (13)$$

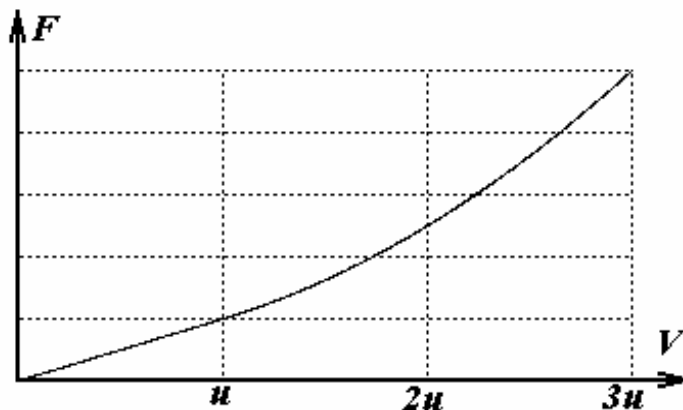
А сила сопротивления в этом случае равна

$$F_{\text{сопр.}} = 2mnS(u^2 + V^2) \quad (14)$$

и зависит от квадрата скорости.

*Заметим, что молекулы реальных газов имеют различные скорости, поэтому указать для них точную границу между «малой» и «большой» скоростью невозможно.*

График зависимости силы сопротивления от скорости представляет собой участок прямой и соприкасающуюся с ней параболу.



**10 класс.**

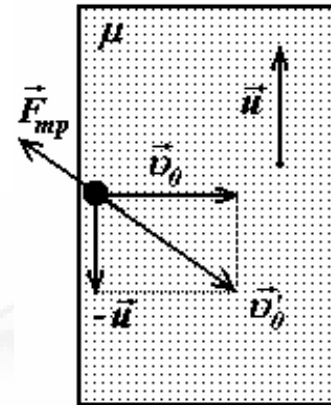
**Задача 1.**

Сила трения скольжения  $\vec{F}_{mp}$ , действующая на шайбу в начальный момент времени, направлена против относительной скорости скольжения шайбы по транспортеру  $\vec{v}'_0$ , которая может быть найдена из преобразований Галилея

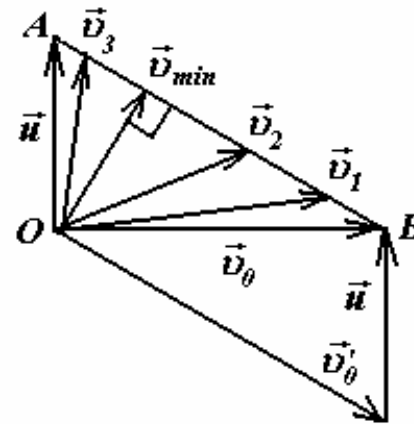
$$\vec{v}'_0 = \vec{v}_0 - \vec{u} \Rightarrow v'_0 = \sqrt{v_0^2 + u^2}. \quad (1)$$

Таким образом, в инерциальной системе отсчета, связанной с лентой транспортера, шайба будет двигаться равноускоренно по прямой до полной остановки с отрицательным ускорением

$$a = -\frac{F_{mp}}{m} = -\frac{\mu mg}{m} = -\mu g. \quad (2)$$



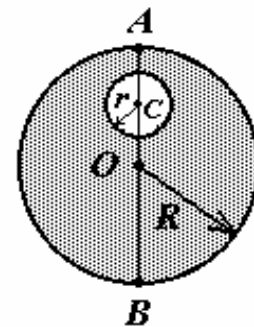
Как следует из обратных преобразований Галилея, скорость шайбы относительно земли будет изменяться с течением времени от  $\vec{v}_0$  до  $\vec{u}$  таким образом, что концы векторов мгновенных скоростей  $\vec{v}_i$  будут скользить вдоль отрезка  $AB$ , образуя так называемый *годограф* скоростей. Из анализа годографа скоростей понятно, что минимальное значение скорости шайбы относительно земли  $\vec{v}_{min}$  достигается в момент времени, когда вектор мгновенной скорости нормален отрезку  $AB$ . Из прямоугольного треугольника  $AOB$  находим  $v_{min} = v_0 \frac{u}{\sqrt{v_0^2 + u^2}}$



**Задача 2.**

*Решение:* наименьшее значение ускорения свободного падения  $g_{min} = 0,938 g_0$  на поверхности астероида достигается в точке, где верхний край полости подходит к поверхности астероида ближе всего. Следовательно, центр полости (точка  $C$  на рисунке) расположен на отрезке  $AO$  на некоторой неизвестной глубине  $AC = a$ , где точка  $O$  — центр однородного астероида.

Масса изъятая из астероида в процессе разработки породы  $m = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$ , где  $\rho$  — плотность вещества



астероида,  $r$  — искомый радиус полости. Для решения задачи мысленно «добавим» выработанную породу обратно. Тогда на всей поверхности астероида должно «восстановиться» прежнее значение ускорения свободного падения —  $g_0$ . Но с другой стороны для точки  $A$  можем записать

$$g_0 = g_{min} + \Delta g_A,$$

где  $\Delta g_A$  — ускорение, создаваемое добавленной массой. С учетом закона гравитации Ньютона получаем

$$\Delta g_A = G \frac{4/3 \pi r^3 \rho}{a^2}.$$

Аналогичное равенство можно записать и для точки  $B$  астероида

$$g_0 = g_{max} + \Delta g_B,$$

где  $\Delta g_B = G \frac{4/3 \pi r^3}{(2R - a)^2}$ . Таким образом, для нахождения глубины залегания центра полости  $a$  и ее радиуса  $r$  имеем систему уравнений

$$g_{min} = g_A = \frac{4}{3} G \pi \rho \left( R - \frac{r^3}{a^2} \right) \quad (1)$$

$$g_{max} = g_B = \frac{4}{3} G \pi \rho \left( R - \frac{r^3}{(2R - a)^2} \right). \quad (2)$$

Выражая из первого уравнения

$$r^3 = \frac{3}{4 G \pi \rho} a^2 (g_0 - g_{min})$$

и подставляя полученное значение во второе уравнение, найдем

$$a = 2R \frac{\sqrt{g_0 - g_{max}}}{\sqrt{g_0 - g_{max}} + \sqrt{g_0 - g_{min}}} = 2R \frac{\sqrt{\eta_2}}{\sqrt{\eta_2} + \sqrt{\eta_1}}. \quad (3)$$

Соответственно, для радиуса полости имеем

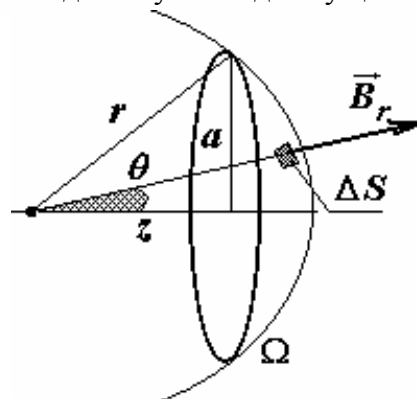
$$r = R \sqrt[3]{\frac{4(g_0 - g_{max})(g_0 - g_{min})}{g_0(\sqrt{g_0 - g_{max}} + \sqrt{g_0 - g_{min}})^2}} = R \sqrt[3]{\frac{4\eta_2\eta_1}{(\sqrt{\eta_2} + \sqrt{\eta_1})^2}}. \quad (4)$$

Подставляя в (3) и (4) числовые данные, находим

$$a = 0,503 R \approx \frac{R}{2}; \quad r = 0,250 R \approx \frac{R}{4}.$$

### Задача 3.

При изменении магнитного потока через проводящий контур в нем возникает ЭДС индукции, приводящая к появлению электрического тока. Эти токи создают свое магнитное поле, которое взаимодействует с движущимся магнитом, вследствие чего и появляются силы «вязкого трения». Существует достаточно простой метод расчета этих сил: работа сил трения в точности равна количеству Джоулевой теплоты индукционных токов. Поэтому решение данной задачи сводится к вычислению мощности индукционного тока в кольце с последующим расчетом силы вязкости.



Вычислим магнитный поток через кольцо. Этот поток удобно рассчитывать через участок сферической поверхности  $\Omega$ , опирающейся на кольцо, с центром, находящимся в центре магнита. На этой поверхности радиальная составляющая магнитного поля является нормальной, поэтому магнитный поток через малую площадку  $\Delta S$  равен  $\Delta\Phi = B_r \Delta S$ . Поток через контур вычисляется как сумма потоков через все малые площадки на рассматриваемом участке сферы

$$\Phi = \sum_i B_{ri} \Delta S_i = \sum_i b \frac{2 \cos \theta_i}{r^3} \Delta S_i = \frac{2b}{r^3} \sum_i \Delta S_i \cos \theta_i. \quad (1)$$

Можно заметить, что  $\Delta S_i \cos \theta_i$  является площадью проекции площадки  $\Delta S_i$  на площадь кольца. Поэтому сумма, стоящая в формуле (1), равна площади кольца  $\pi a^2$ . По теореме Пифагора радиус сферы равен  $r = \sqrt{a^2 + z^2}$ . Следовательно, поток через кольцо определяется формулой

$$\Phi = \frac{2\pi b a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (3)$$

Согласно закону электромагнитной индукции, ЭДС индукции равна производной от магнитного потока по времени

$$E = -\Phi' = \frac{6\pi a^2 b z V}{(a^2 + z^2)^{5/2}}. \quad (4)$$

При выводе последнего соотношения учтено, что производная от  $z$  равна скорости движения магнита  $V$ . По закону Джоуля-Ленца вычислим мощность теплоты, выделяющейся в стержне

$$P = \frac{E^2}{R} = \frac{1}{R} \left( \frac{6\pi a^2 b z V}{(a^2 + z^2)^{5/2}} \right)^2 = \frac{36\pi^2 a^4 b^2 z^2}{R(a^2 + z^2)^5} V^2. \quad (5)$$

Равная ей мощность, развиваемая силами вязкости, рассчитывается «по определению»  $P = FV$ . Из равенства найденных мощностей получаем выражение для магнитной силы

$$F = \frac{36\pi^2 a^4 b^2 z^2}{R(a^2 + z^2)^5} V. \quad (6)$$

#### Задача 4.

1) Для нахождения поверхностной плотности  $\sigma'$  поляризационных зарядов на ленте при выходе из конденсатора будем считать, что вследствие малости скорости движения ленты генератора распределение зарядов на ней будет таким же, как и на неподвижной пластине такой же толщины из такого же диэлектрика, внесенной в конденсатор. Пусть напряженность поля внутри конденсатора вне пластины  $E$ , тогда внутри пластины —  $E_1 = \frac{E}{\varepsilon}$ . Тогда для разности потенциалов

между обкладками (она в данном случае равна напряжению) можем записать

$$U = E(d - h) + \frac{E}{\varepsilon} h \Rightarrow E = \frac{\varepsilon U}{(d - h)\varepsilon + h}. \quad (1)$$

Соответственно в диэлектрике модуль напряженности электростатического поля меньше в  $\varepsilon$  раз

$$E_1 = \frac{U}{(d - h)\varepsilon + h}.$$



С другой стороны, согласно принципу суперпозиции поле в диэлектрике можно рассматривать как сумму внешнего поля  $\vec{E}$  и поля индуцированных (поляризационных) зарядов  $\vec{E}'$

$$E_1 = \frac{E}{\varepsilon} = E + E' \Rightarrow E' = -E \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}. \quad (1)$$

Знак «-» в (1) указывает на противоположность направлений полей (а значит и знаков поверхностных плотностей зарядов) конденсатора и поляризационных зарядов. Поскольку лента внутри конденсатора тоже имеет две плоские поверхности, то окончательно имеем

$$\sigma' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon U}{\varepsilon(d - h) + h} = -\varepsilon_0 \frac{(\varepsilon - 1)U}{\varepsilon(d - h) + h}. \quad (2)$$

Поскольку щетки купола генератора расположены со стороны отрицательной обкладки конденсатора ( $U < 0$ ), то как видим из (2) заряд ленты (и купола) будет положительным и знак «-» в (2) далее можно опустить.

2) Как видно из схемы генератора поляризационные заряды, снятые с помощью щеток с ленты, подаются на внутреннюю поверхность купола. Однако на проводнике статические заряды могут располагаться только на его поверхности. Следовательно, в течение достаточно малого промежутка времени все заряды в генераторе «переберутся» на внешнюю поверхность купола, освобождая «место» для новой порции заряда с ленты. Поскольку потерь заряда нет, то за время  $t$  на сфере генератора окажется суммарный заряд  $q(t)$ , «принесенный» лентой длиной  $l(t) = v \cdot t$ , заряженной с поверхностной плотностью  $\sigma'$

$$q(t) = \sigma' \cdot S(t) = \sigma a l(t) = \varepsilon_0 a v t \frac{(\varepsilon - 1)U}{\varepsilon(d - h) + h}. \quad (3)$$

Как видим из (3) в отсутствие потерь заряд генератора Ван-дер-Граафа прямо пропорционален времени его работы. На практике это означало бы, что с его помощью можно было бы получать бесконечные напряжения и напряженности полей, чего, конечно же, не происходит вследствие различного рода потерь.

3) Заряды противоположного знака (с внутренней стороны ленты) но такие же по величине (согласно закону сохранения заряда) стекают по шине заземления. Следовательно, сила тока заземления  $I_3$

$$I_3 = \frac{q(t)}{t} = -\varepsilon_0 a v \frac{(\varepsilon - 1)U}{\varepsilon(d - h) + h}. \quad (4)$$

4) Рассмотрим подробнее механизм потерь заряда с купола генератора. По мере роста заряда генератора  $q(t)$  увеличивается модуль напряженности электростатического поля  $\vec{E}(t)$  в воздухе ( $\varepsilon \approx 1$ ) вокруг купола. Поскольку воздух можно считать слабопроводящей средой, то согласно закону Ома в дифференциальной форме увеличивается и модуль плотности тока утечки  $\vec{j}(t)$  через воздух. Если радиус купола  $R$ , то для силы тока утечки находим

$$I(t) = j(t) 4\pi R^2 = \left\{ j(t) = \frac{1}{\rho} E(t); E(t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q(t)}{R^2} \right\} = \frac{1}{\rho} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q(t)}{R^2} 4\pi R^2 = \frac{q(t)}{\rho\varepsilon_0}. \quad (5)$$

Заряд купола перестанет меняться, когда сила тока зарядки купола (равная по модулю силе тока заземления  $I_3$ ) станет равной силе тока утечки  $I(t)$  через воздух. Таким образом, для установившегося заряда купола  $q^*$  имеем

$$\frac{q^*}{\rho \varepsilon_0} = \varepsilon_0 a v \frac{(\varepsilon - 1)U}{\varepsilon(d - h) + h} \Rightarrow q^* = \varepsilon_0^2 \rho a v \frac{(\varepsilon - 1)U}{\varepsilon(d - h) + h}. \quad (6)$$

Подчеркнем, что на практике установившееся значение заряда купола генератора  $q^*$  достигается достаточно быстро — именно поэтому генератор Ван-дер-Граафа является источником сильных *электростатических* полей.

5) при зажигании коронного разряда (фантастическое зрелище, слабонервным просим не смотреть!) изменится значение тока утечки (5)

$$I(t) = j(t)4\pi R^2 = \left( \frac{1}{\rho} \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q(t)}{R^2} + \beta \frac{1}{16\pi^2 \varepsilon_0^2} \frac{q^2(t)}{R^4} \right) 4\pi R^2 = \frac{q(t)}{\rho \varepsilon_0} + \beta \frac{q^2(t)}{4\pi \varepsilon_0^2 R^2}. \quad (7)$$

Соответственно в этом случае установившееся значение заряда на куполе генератора  $q^{**}$  найдем из квадратного уравнения

$$\frac{q(t)}{\rho \varepsilon_0} + \beta \frac{q^2(t)}{4\pi \varepsilon_0^2 R^2} = I_3 = \varepsilon_0 a v \frac{(\varepsilon - 1)U}{\varepsilon(d - h) + h}. \quad (8)$$

$$q^{**} = -\frac{2\pi \varepsilon_0 R^2}{\rho \beta} \pm \sqrt{\frac{4\pi^2 \varepsilon_0^2 R^4}{\rho^2 \beta^2} + \frac{4\pi \varepsilon_0^2 R^2 I_3}{\beta}} \quad (9)$$

Как видим из (9) один из корней отрицательный (не имеет физического смысла, поскольку при этом заряды должны сами «стекаются» к куполу и «самопроизвольно» заряжать его). Следовательно, окончательный ответ

$$q^{**} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \varepsilon_0^2 R^4}{\rho^2 \beta^2} + \frac{4\pi \varepsilon_0^2 R^2}{\beta} \cdot \frac{a v (\varepsilon - 1)U}{\varepsilon(d - h) + h}} - \frac{2\pi \varepsilon_0 R^2}{\rho \beta}.$$

11 класс.

**Задача 1.**

Уравнение второго закона Ньютона для движущегося шарика имеет вид

$$ma = qE - \beta v, \quad (1)$$

где  $qE$  - сила, действующая на шарик со стороны электрического поля, напряженность которого определяется формулой

$$E = \frac{U}{h}. \quad (2)$$

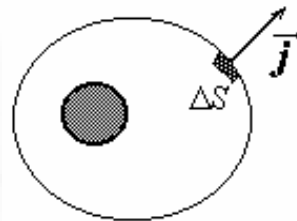
Учитывая, что шарик легкий, а жидкость вязкая, можно считать, что в любой момент времени сумма сил, действующих на шарик равна нулю, то есть, выполняется соотношение

$$qE = \beta v. \quad (3)$$

Получим уравнение, описывающее, изменение заряда шарика с течением времени. Очевидно, что заряд уменьшается вследствие наличия

слабого тока, стекающего с шарика  $\frac{\Delta q}{\Delta t} = -I$ . Суммарная сила тока, стекающего с шарика, равна потоку вектора плотности тока  $\vec{j}$

$$I = \Phi_j = \sum \vec{j} \cdot \vec{n} \Delta S, \quad (4)$$



через любую замкнутую поверхность, окружающую шарик. По закону Ома плотность тока связана с напряженностью поля соотношением

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}. \quad (5)$$

Следовательно, поток вектора  $\vec{j}$ , выражается через поток вектора напряженности соотношением

$$\Phi_j = \frac{1}{\rho} \Phi_E = \frac{q}{\rho \epsilon \epsilon_0}, \quad (6)$$

в котором окончательное выражение получено с помощью теоремы Гаусса.

*Заметим, что в выражение (2) диэлектрическая проницаемость жидкости не входит, а при выводе формулы (6) следует учесть поляризационные заряды, возникающие у поверхности шарика.*

Таким образом, изменение заряда шарика описывается уравнением

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = -\frac{q}{\rho \epsilon \epsilon_0}. \quad (7)$$

Выразим из этого уравнения заряд шарика  $q = -\rho \epsilon \epsilon_0 \frac{\Delta q}{\Delta t}$  и подставим в уравнение

(3) (в котором запишем  $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ ):

$$\beta \frac{\Delta x}{\Delta t} = -\rho \epsilon \epsilon_0 \frac{\Delta q}{\Delta t} \cdot \frac{U}{h}. \quad (8)$$

Максимальному смещению шарика соответствует его полная разрядка (в этом случае  $\Delta q = -q_0$ ). Таким образом, из уравнения (8) следует, что максимальное смещение шарика равно  $x_{max} = \frac{\rho \varepsilon_0 q_0 U}{\beta h}$ .

### Задача 2.

1. Рассмотрим произвольную частицу облака, находящуюся на расстоянии  $r$  до его центра. Как было доказано еще И.Ньютоном, гравитационное поле внутри однородного сферического слоя отсутствует, поэтому сила гравитационного притяжения рассматриваемой частицы полностью обусловлена частицами, находящимися на расстояниях к центру меньших  $r$ . Учитывая сферическую симметрию облака, силу гравитационного притяжения рассматриваемой частицы к центру облака можно записать в виде

$$F = G \frac{mM'}{r^2} = G \frac{m}{r^2} M \frac{r^3}{R^3} = \frac{GM}{R^3} mr, \quad (1)$$

где  $M' = M \frac{r^3}{R^3}$  масса части облака находящаяся внутри сферы радиуса  $r$ ,  $M, R$  - масса и радиус облака, соответственно,  $m$  - масса рассматриваемой частицы. Запишем уравнение второго закона Ньютона для частицы

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{GM}{R^3} r, \quad (2)$$

из которого следует, что ускорение частицы пропорционально ее расстоянию до центра. Так в начальный момент времени частицы следует считать неподвижными, то их скорость, и, следовательно, смещение также пропорциональны начальному расстоянию до центра. Из этих рассуждений следует, что расстояния до центра для всех частиц будут уменьшаться в одно и тоже число раз - следовательно, облако останется однородным в любой момент времени. Формализуем эти рассуждения,

для чего введем безразмерную переменную  $\xi(t) = \frac{r(t)}{r_0}$ , равную отношению

расстояния частицы до центра облака в произвольный момент времени к ее начальному расстоянию. Скорость и ускорение движения частицы могут быть

выражены через эту переменную  $v = \frac{dr}{dt} = r_0 \frac{d\xi}{dt} = r_0 v_\xi$ ,  $a = r_0 a_\xi$ , где  $v_\xi, a_\xi$  -

первая и вторая производные от  $\xi$  (скорость и ускорение, измеренные в единицах  $r_0$ ). Подставляя эти значения в уравнение (2), получаем уравнение

$$a_\xi = -\frac{GM}{R^3} \xi, \quad (3)$$

не содержащее начального расстояния. Кроме того, в начальный момент времени для всех частиц облака  $\xi_0 = 1$ . Следовательно, переменная  $\xi$  для всех частиц одинакова в любой момент времени, что еще раз подтверждает вывод о сохранении однородности облака.

2. Так как при движении любой частицы масса части облака, находящейся ближе к центру, остается постоянной, то движение частицы эквивалентно движению в поле точечной массы  $M'$ , сосредоточенной в центре облака. В этом случае закон сохранения механической энергии для движущейся частицы будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} &= mGM \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) = mGM \frac{r_0^3}{R^3} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) = \\ &= mGM \frac{r_0^2}{R^3} \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Вычислим теперь кинетическую энергию всего облака в момент времени, когда радиус облака стал равным  $R\xi$ . Для этого необходимо просуммировать выражение (4) по всем частицам облака. Так как введенная переменная  $\xi$  одинакова для всех частиц, то указанное суммирование можно выполнить, используя начальное расположение частиц (иными словами проинтегрировать выражение (4) по начальным положениям). Выделим в начальном облаке тонкий сферический слой радиусом  $r_0$  и толщиной  $dr_0$ . Масса этого слоя

$$dM = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} 4\pi r_0^2 dr_0 = \frac{3M}{R^3} r_0^2 dr_0. \text{ В процессе сжатия этот слой будет обладать}$$

кинетической энергией, определяемой выражением (4), в котором следует заменить  $m$  на  $dM$ . Выполнив элементарное интегрирование, получим кинетическую энергию облака

$$E = \frac{1}{2} \int_0^R v^2 dM = \int_0^R \frac{3M}{R^3} r_0^2 dr_0 \frac{GM}{R^3} r_0^2 \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right) = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right). \quad (5)$$

*Это же выражение можно получить как разность между начальной и конечной гравитационной энергией однородного шара.*

Теперь следует полученную энергию положить равной внутренней энергии одноатомного идеального газа (фактически мы считаем, что гравитационная энергия перешла в кинетическую, а затем во внутреннюю)

$$U = \frac{3}{2} \frac{M}{\mu} \tilde{R}T, \quad (6)$$

где обозначено  $\tilde{R} \approx 8 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$  - универсальная газовая постоянная,

$\mu = 1 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$  - молярная масса атомарного водорода. Из равенства выражений

(5) и (6) определяем степень сжатия облака, при котором начинаются термоядерные реакции:

$$\frac{1}{\xi} - 1 = \frac{5}{2} \frac{R\tilde{R}T}{GM\mu} \approx 2 \cdot 10^7,$$

следовательно, звезда «загорится» когда ее радиус станет равным  $R^* \approx 1 \cdot 10^9 \text{ м}$ , что приблизительно соответствует размерам нашего Солнца.

3. Для оценки времени сжатия облака воспользуемся тем обстоятельством, что начальный радиус облака значительно превышает размеры образующейся звезды. Поэтому можно считать, что облако сжимается в точку. В этом случае можно считать, что траектория движения частицы (т.е. отрезок прямой) является очень вытянутым эллипсом. Согласно третьему закону Кеплера период обращения по эллиптической орбите определяется большой полуосью, и одинаков для всех эллипсов с одинаковой длиной большой полуоси. Следовательно, время падения  $t_1$  с расстояния  $R$  в притягивающий центр будет равно половине периода

обращения  $T_c$  вокруг этого же центра по круговой орбите радиуса  $R_c = \frac{R}{2}$ .

Последний вычислить не составляет труда. Из закона Ньютона следует уравнение

$$G \frac{mM}{R_c^2} = \frac{mv^2}{R_c} = \frac{m(2\pi R_c)^2}{R_c T_c^2},$$

которое и позволяет найти время падения

$$t_1 = \frac{T_c}{2} = \pi \sqrt{\frac{R_c^3}{GM}} \approx 1 \cdot 10^{14} c \approx 4 \cdot 10^6 \text{ лет}.$$

По космическим масштабам 4 миллиона лет, не такой уж и большой промежуток времени.

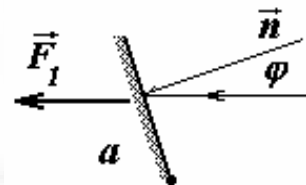
### Задача 3.

Первая часть данной задачи широко известна, поэтому ее решение приведем конспективно.

1. Сила давления света на зачерненную сторону лепестка при нормальном падении

$F_1 = \frac{I_0}{c} a^2 = 0,40 \cdot 10^{-9} H$ , на зеркальную сторону в два раза больше

$$F_2 = 2 \frac{I_0}{c} a^2 = 0,80 \cdot 10^{-9} H.$$



2. При повороте лепестков на угол  $\varphi$  сила давления

уменьшается, так уменьшается количество света,

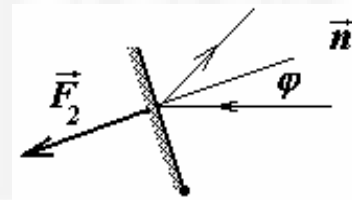
падающего на лепесток. На зачерненную поверхность сила давления равна

$$F_1 = \frac{I_0}{c} a^2 \cos \varphi \quad (1)$$

и направлена по направлению падающего света.

При падении света на зеркальную поверхность сила направлена перпендикулярно пластинке и равна

$$F_2 = 2 \frac{I_0}{c} a^2 \cos \varphi. \quad (2)$$



3. Так как силы светового давления равномерно распределены по поверхности пластинки, то для

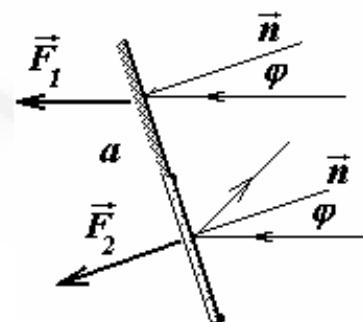
вычисления их момента можно считать, что

суммарная сила приложена к центру пластинки.

Плечо силы, действующий на зачерненную сторону

равен  $\frac{a}{2} \cos \varphi$ , ее момент (положительный)

$$M_1 = \frac{I_0}{c} a^2 \cos \varphi \cdot \frac{a}{2} \cos \varphi = \frac{I_0}{2c} a^3 \cos^2 \varphi. \quad (3)$$



Плечо силы, действующей на зеркальную поверхность равно  $\frac{a}{2}$ , следовательно ее

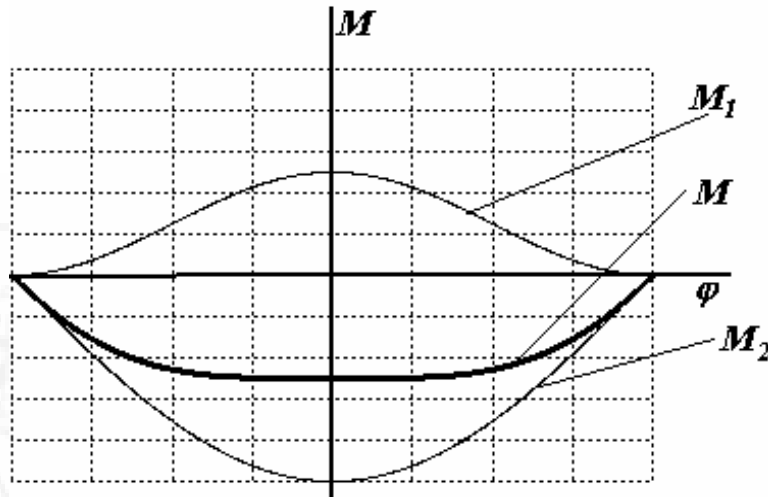
момент (отрицательный)

$$M_2 = 2 \frac{I_0}{c} a^2 \cos \varphi \cdot \frac{a}{2} = \frac{I_0}{c} a^3 \cos \varphi. \quad (4)$$

Суммарный момент сил, действующий на вертушку равен

$$M = M_1 - M_2 = \frac{I_0}{2c} a^3 (\cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi) \quad (5)$$

Для дальнейших расчетов заметим, что при повороте на пол оборота зеркальная и зачерненная стороны лепестков меняются местами, поэтому достаточно рассмотреть диапазон изменения угла в пределах  $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ . Графики зависимостей моментов сил от угла поворота показаны на рисунке.



Таким образом, при любом положении лепестка момент сил светового давления отрицательный, то есть вертушка должна вращаться черной стороной вперед. Для вычисления среднего момента сил проведем усреднение угловой зависимости

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi) d\varphi = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi} \approx 0,77$$

Таким образом, средний момент силы равен

$$\langle M \rangle = 0,77 \frac{I_0}{2c} a^3 \approx 1,5 \cdot 10^{-12} \text{ Н} \cdot \text{м} \quad (5)$$

4. Плотность потока теплоты, при повороте лепестка на угол  $\varphi$  равен

$$q = I_0 \cos \varphi, \text{ его среднее значение } q_0 = \frac{2}{\pi} I_0.$$

5. В единицу времени на площадку единичной площади попадают  $\nu = \frac{1}{4} n \langle v \rangle$

молекул. В среднем каждая молекула переносит энергию  $\langle E_0 \rangle = \frac{3}{2} kT_0$ , а уносит

$\langle E \rangle = \frac{3}{2} kT$ . Поэтому энергия, которая уносится газом с единицы площади в единицу времени равен

$$q = \nu \Delta \langle E \rangle = \frac{1}{4} n \langle v \rangle \cdot \frac{3}{2} k(T - T_0). \quad (6)$$

Следовательно, коэффициент теплоотдачи равен

$$\beta = \frac{1}{4} n \langle v \rangle \cdot \frac{3}{2} k = \frac{3}{8} \frac{p}{T_0} \sqrt{\frac{8RT_0}{\pi\mu}} \approx 80 \frac{Bm}{m^2 \cdot K}.$$

6. Обозначим температуру зачерненной стороны  $T_1$ , а температуру зеркальной  $T_2$ . Тогда в установившемся режиме поток теплоты, падающий на пластику (свет)  $q_0$ , должен быть равен сумме потоков теплоты уносимых с зачерненной  $q_1$  и зеркальной  $q_2$  сторон  $q_0 = q_1 + q_2$ , или

$$q_0 = \beta(T_1 + T_2 - 2T_0). \quad (7)$$

Кроме того, поток теплоты через пластинку  $q'$  равен потоку,  $q_2$ :

$$\beta(T_2 - T_0) = \gamma \frac{T_1 - T_2}{h}. \quad (8)$$

Эти два уравнения позволяют найти температуры сторон. Так разность температур зачерненной и зеркальной сторон

$$T_1 - T_2 = \frac{q_0}{\beta + 2\frac{\gamma}{h}} = \frac{2}{\pi} \frac{q_0}{\beta + 2\frac{\gamma}{h}} \approx 1,9 \cdot 10^{-3} K.$$

Температуру пластинки можно найти из условия равенства потоков падающей и уносимой газом теплоты  $q_0 = 2\beta(T - T_0)$ , откуда

$$T = T_0 + \frac{q_0}{2\beta} \approx 300 K. \quad (9)$$

7. Разность давлений можно оценить, считая по-прежнему, что молекулы отраженные поверхностью имеют распределение скоростей, соответствующее температуре поверхности. Поэтому импульс, переданный пластинке при одном ударе молекулы  $\Delta p' = m(v_{n0} + v_n)$ , где  $v_{n0}, v_n$  - нормальные компоненты скоростей молекул до удара и после удара. Суммарное давление можно получить, умножив полученное значение импульса на среднее число ударов. Разность давлений можно определяется разностью средних скоростей молекул, отраженных от разных сторон лепестков, а эти скорости пропорциональны корню квадратному из температуры, поэтому

$$\Delta P = \nu m(v_{n1} - v_{n2}) = \frac{p}{\sqrt{T}} (\sqrt{T + \Delta T} - \sqrt{T})$$

Учитывая, что разность температур сторон лепестков мала, последнее выражение можно упростить

$$\Delta P = \frac{p}{\sqrt{T}} (\sqrt{T + \Delta T} - \sqrt{T}) \approx p \frac{\Delta T}{2T} \approx 1,6 \cdot 10^{-4} Pa.$$

Силы давления газа направлены перпендикулярно поверхности, поэтому момент сил, действующих на вертушку со стороны газа равен

$$M = 2\Delta P \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2} = \Delta P \cdot a^3 \approx 1,6 \cdot 10^{-10} H \cdot m$$

Что на два порядка превышает момент сил давления газа.

8. Для оценки момента сил светового давления  $\langle M \rangle \approx \frac{I_0}{2c} a^3$ .

Момент сил давления газа также может быть оценен достаточно быстро:



аргументация для вывода разности давлений была приведена ранее  $\Delta P \approx p \frac{\Delta T}{2T}$ ;

оценка разности температур  $\Delta T \approx \frac{2I_0 h}{\gamma}$  следует из таких рассуждений:

приблизительно половина потока теплоты, падающего на пластинку, должна быть перенесена на ее противоположную сторону.

Таким образом  $M_{\text{газа}} \approx \frac{I_0 h P a^3}{T \gamma}$ , а их отношение  $\frac{M_{\text{св}}}{M_{\text{газа}}} \approx \frac{\gamma T}{2chP}$ .

Следовательно, давление газа в сосуде должно быть меньше, чем (из условия  $M_{\text{св}} \approx M_{\text{газа}}$ )  $P \approx \frac{\gamma T}{2ch} \approx 0,1 \text{Па}$ .

#### Задача 4.

В данном случае сфотографированы интерференционные полосы, возникающие при интерференции волн, отраженных от нижней грани верхней пластики и верхней грани нижней пластинки.

Разность хода между этими волнами

$$\delta l = 2h + \frac{\lambda}{2}, \quad (1)$$

где  $h$  - величина зазора между пластинками в точке с координатой  $x$ . Учитывая малость угла, можно записать

$h = x\varepsilon$ . Переход от одной интерференционной полосы к другой соответствует изменению разности хода на длину волны. Поэтому ширина интерференционной полосы выражается формулой  $\Delta x = \frac{\lambda}{2\varepsilon}$ .

Легко подсчитать, что на одном сантиметре ( $L = 1,0 \text{см}$ ) укладывается  $N = 15$  полос, поэтому ширина интерференционной полосы равна  $\Delta x = \frac{L}{N}$ .

Следовательно, длина волны падающего света

$$\lambda = 2\varepsilon \frac{L}{N} \approx 580 \text{нм}. \quad (2)$$

2. Видно, что в левой части интерференционные полосы сгущаются, выгибаясь влево, следовательно, здесь разность хода увеличивается по сравнению с плоской поверхностью (то есть здесь на пластинке впадина).

Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что правым кольцам соответствует выступ. Примерный профиль показан на рисунке. Левая впадина находится в месте, соответствующему 16 интерференционной полосе для плоских пластинок, на максимальной глубине находится 38 полоса, следовательно, эта глубина равна

$(38 - 16) \frac{\lambda}{2} \approx 6,4 \text{мкм}$ . Максимальному выступу соответствует 19 интерференционная полоса (а на этом месте должна быть 27 полоса), следовательно, высота выступа  $(27 - 19) \frac{\lambda}{2} \approx 2,3 \text{мкм}$ .

