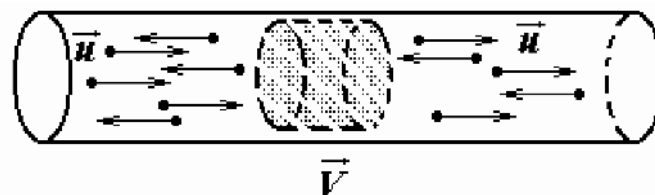


Условие

Задача 4. 1. Пусть при движении тела в вязкой среде сила сопротивления пропорциональна скорости движения $F_{\text{сопр.}} = \beta_1 V$. На это тело начинает действовать постоянная сила F_0 . Постройте примерный график зависимости скорости тела от времени, найдите скорость установившегося движения, оцените время достижения этой скорости. Масса тела равна m . 2. Пусть при движении тела в вязкой среде сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости движения $F_{\text{сопр.}} = \beta_2 V^2$. На это тело начинает действовать постоянная сила F_0 . Постройте примерный график зависимости скорости тела от времени, найдите скорость установившегося движения, оцените время достижения этой скорости. Масса тела равна m .

3. Рассмотрите следующую простейшую модель возникновения силы сопротивления воздуха. Пусть цилиндрический поршень площадью поперечного сечения S движется без трения внутри очень длинной горизонтальной трубы. Внутри трубы параллельно ее оси движутся маленькие частицы одинаковой массы m (которая значительно меньше массы поршня), причем скорости всех частиц одинаковы и равны u (приблизительно половина этих частиц движется в одном направлении, а остальные в противоположном). Концентрация частиц (число частиц в единице объема) равна n . Удары частиц о поршень можно считать абсолютно упругими. Найдите зависимость средней силы сопротивления, действующей на поршень со стороны частиц, от скорости тела V . Рассмотрите случаи $V < u$ и $V > u$. Постройте примерный график этой зависимости.



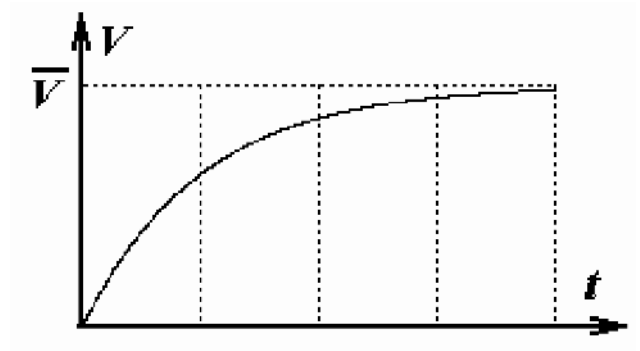
Решение

Задача 4.

1. Уравнение второго закона Ньютона для движения в вязкой среде имеет в данном случае вид

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = F_0 - \beta_1 v. \quad (1)$$

Из этого уравнения следует, что ускорение изменяется с течением времени, причем с ростом скорости ускорение уменьшается. При достижении равенства силы сопротивления и силы F_0 , ускорение обращается в нуль. Следовательно, скорость установившегося движения $\bar{V}$ определяется соотношением



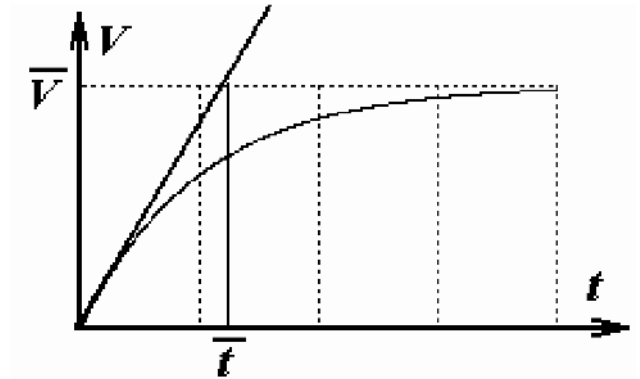
$$\bar{V} = \frac{F_0}{\beta_1}. \quad (2)$$

Качественный вид зависимости скорости от времени показан на рисунке.

Для оценки времени достижения установившейся скорости, положим, что тело движется с постоянным ускорением (равным ускорению в начальный момент времени $a_0 = \frac{F_0}{m}$) до тех пор, пока скорость не достигнет значения (2):

$$\bar{t} = \frac{\bar{V}}{a_0} = \frac{m}{\beta_1}. \quad (3)$$

Этот способ получения оценки проиллюстрирован на следующем рисунке.



Отметим, что рассматриваемая зависимость точно описывается функцией

$$v = \frac{F_0}{\beta_1} (1 - \exp(-\beta_1 t)).$$

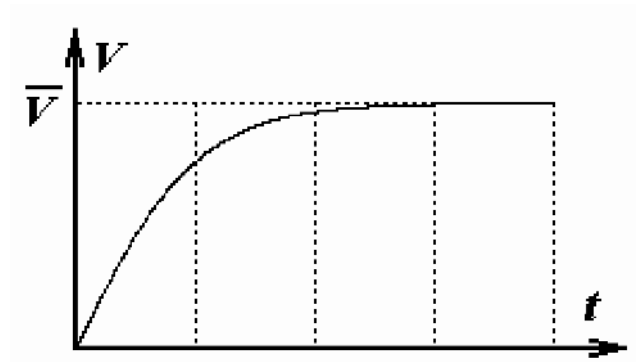
2. Рассмотрение этой части задачи полностью аналогично предыдущей: - уравнение движения

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = F_0 - \beta_2 v^2; \quad (4)$$

- скорость установившегося движения

$$\bar{V} = \sqrt{\frac{F_0}{\beta_2}}. \quad (5)$$

- графика зависимости скорости от времени качественно не отличается от рассмотренного ранее; - время достижения установившейся скорости (обратите внимание - в этом случае это время зависит от действующей силы)



$$\bar{t} = \frac{\bar{V}}{a_0} = \frac{m}{\sqrt{F_0 \beta_2}}. \quad (6)$$

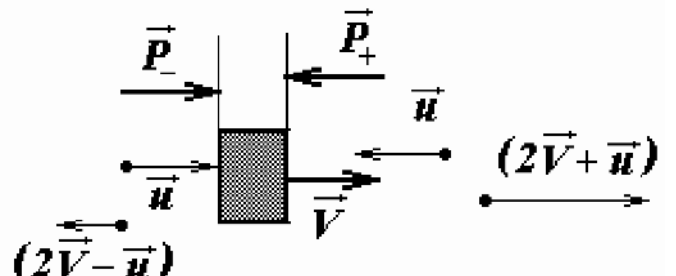
Отметим, что в данном зависимость скорости от времени точно описывается функцией

$$v = \sqrt{\frac{F_0}{\beta_2}} \cdot \frac{1 - \exp(t - \alpha t)}{1 + \exp(-\alpha t)}, \text{ где } \alpha = 2 \frac{\sqrt{F_0 \beta_2}}{m}.$$

3. Сила сопротивления возникает из-за столкновений поршня с движущимися частицами, которые сообщают поршню импульс. Рассмотрим случай малой скорости поршня $V < u$. О переднюю грань поршня ударятся частицы, которые движутся навстречу поршню, число этих столкновений за промежуток времени Δt рассчитывается по формуле

$$\nu_+ = \frac{1}{2} n S (V + u) \Delta t. \quad (7)$$

В результате столкновения проекция скорость частицы на направление движения поршня изменяется от $-u$ до $(u + 2V)$ - это утверждение легко доказать перейдя в систему отсчета, связанную с поршнем. Итак, в результате одного столкновения поршень получит импульс



$$p = m(u + 2V + u) = 2m(u + V). \quad (8)$$

Следовательно, полный импульс, полученный передней гранью поршня, равен

$$P_+ = \nu_+ p = mnS(u + V)^2 \Delta t. \quad (9)$$

Аналогично, можно подсчитать импульс, который получит поршень, от частиц, которые ударяются о заднюю грань поршня (разумеется, это частицы, догоняющие поршень)

$$P_- = mnS(u - V)^2 \Delta t. \quad (10)$$

Таким образом, полный импульс, полученный поршнем равен разности

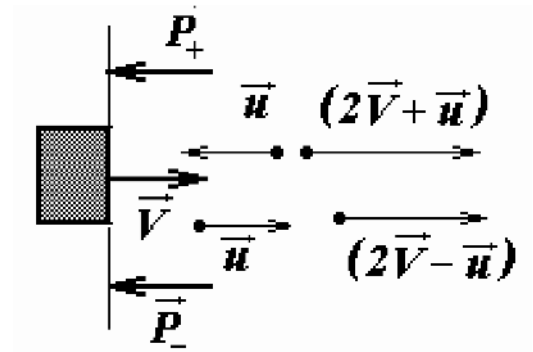
$$P = P_+ - P_- = mnS \Delta t ((u + V)^2 - (u - V)^2) = 4mnS \Delta t u V. \quad (11)$$

Учитывая, что действующая сила равна импульсу, полученному в единицу времени, получим выражение для силы сопротивления

$$F_{\text{сопр.}} = \frac{P}{\Delta} = 4mnSuV. \quad (12)$$

Как видно, в рассмотренной модели сила сопротивления прямо пропорциональна скорости движения поршня.

В случае больших скоростей $V > u$, следует учесть, что передняя грань поршня будет сталкиваться не только с частицами, которые движутся ему навстречу, но и частицами движущимися в том же направлении, что и поршень (который их догоняет). Столкновений же с задней гранью не будет. В остальном же расчет переданного импульса остается прежним и приводит к результату



$$P = P_+ + P_- = mnS\Delta t((u+V)^2 + (u-V)^2) = 2mnS\Delta t(u^2 + V^2). \quad (13)$$

А сила сопротивления в этом случае равна

$$F_{\text{сопр.}} = 2mnS(u^2 + V^2) \quad (14)$$

и зависит от квадрата скорости. Заметим, что молекулы реальных газов имеют различные скорости, поэтому указать для них точную границу между «малой» и «большой» скоростью невозможно.

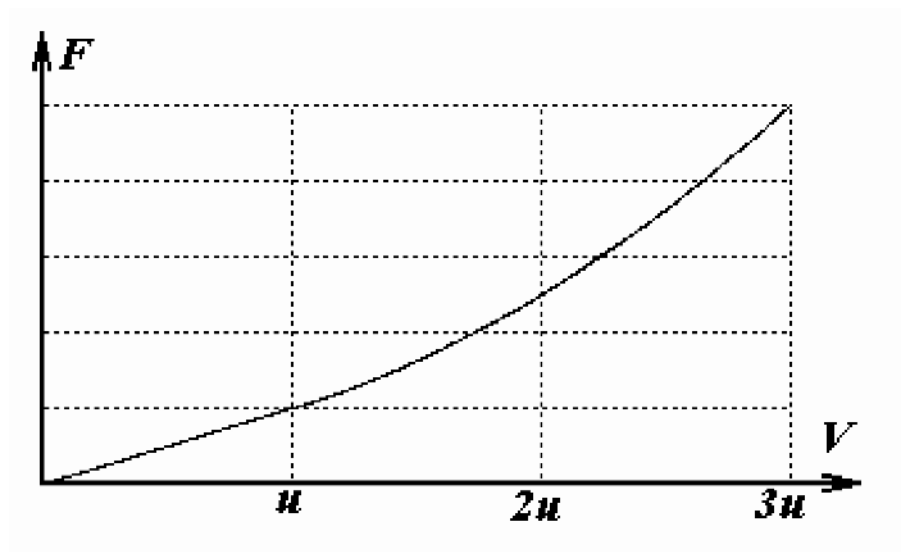


График зависимости силы сопротивления от скорости представляет собой участок прямой и соприкасающуюся с ней параболу.