

Условие

Задача 3. В последнее время появились медицинские грелки, разогрев которых происходит за счет кристаллизации жидкости, находящейся внутри грелки. Кристаллизация инициируется с помощью катализатора (в этом случае кристаллизация проходит в широком диапазоне температур).

Внутренний объем грелки представляет собой параллелепипед размерами $a \times h \times l$. Кристаллизация начинается с одного из торцов, граница отвердевшей области движется с малой постоянной скоростью v . Найдите зависимость температуры грелки от времени (с начала кристаллизации). Чему равна максимальная температура грелки?



Удельная теплота кристаллизации равна λ , удельная теплоемкость рабочего вещества в жидком состоянии равна C_0 , а в твердом состоянии на $\eta = 10\%$ меньше, начальная температура равна t_0 , изменением плотности вещества, теплоемкостью сосуда и потерями теплоты в окружающую среду пренебречь. Считайте, что в любой момент времени температура во всех точках грелки одинакова (вследствие высокой теплопроводности вещества). *Рекомендуем в ходе решения задачи (при необходимости) использовать приближенную формулу $\frac{1}{1+z} \approx 1 - z$, погрешность которой при $z \leq 0,1$ не превышает 1%*

Решение

Задача 3.

Пусть в некоторый момент времени¹ τ длина отвердевшей части равна $x = v\tau$. За последующий малый промежуток времени Δt в ходе кристаллизации выделится количество теплоты

$$\Delta q = \lambda \rho a h \Delta x = \lambda \rho a h v \Delta t, \quad (1)$$

где ρ - плотность вещества в грелке. Эта теплота пойдет на нагревание как жидкой, так и отвердевшей части содержимого грелки на Δt градусов. Поэтому это же количество теплоты можно выразить с помощью известных формул

$$\Delta q = (C_0 \rho a h (l - x) + C_0 (1 - \eta) \rho a h x) \Delta t. \quad (2)$$

Обратите внимание, что суммарная теплоемкость грелки зависит от соотношения жидкой и отвердевшей части вещества, следовательно, и от времени. Из уравнения теплового баланса

$$(C_0 \rho a h (l - x) + C_0 (1 - \eta) \rho a h x) \Delta t = \rho a h v \Delta \tau \quad (3)$$

следует, что скорость изменения температуры сложным образом зависит от времени (очевидно, что $x = v\tau$):

$$\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{\lambda v}{C_0(l - \eta v \tau)}. \quad (4)$$

¹ Мы используем для обозначения времени символ τ , что бы не путать с температурой t .

Для упрощения последнего выражения воспользуемся приближенной формулой, приведенной в условии задачи,

$$\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{\lambda v}{C_0(l - \eta v \tau)} = \frac{\lambda v}{C_0 l \left(1 - \frac{\eta v \tau}{l}\right)} \approx \frac{\lambda v}{C_0 l} \left(1 + \frac{\eta v \tau}{l}\right) = \frac{\lambda v}{C_0 l} + \frac{\lambda v^2 \eta}{C_0 l^2} \tau. \quad (5)$$

Таким образом, скорость изменения температуры линейно зависит от времени. Эта зависимость полностью аналогична зависимости скорости движения при равноускоренном движении. Используя эту математическую аналогию, можем записать закон изменения температуры со временем

$$t = t_0 + \frac{\lambda v}{C_0 l} \tau + \frac{\lambda v^2 \eta}{C_0 l^2} \cdot \frac{\tau^2}{2}. \quad (6)$$

Еще раз отметим, что нелинейная (квадратичная) зависимость температуры от времени связана с изменением теплоемкости системы. Максимальная температура может быть определена из последнего выражения, полагая в нем $\tau = \frac{l}{v}$,

$$t_{max} = t_0 + \frac{\lambda}{C_0} \left(1 + \frac{\eta}{2}\right). \quad (7)$$

¹ Мы используем для обозначения времени символ τ , что бы не путать с температурой t .