

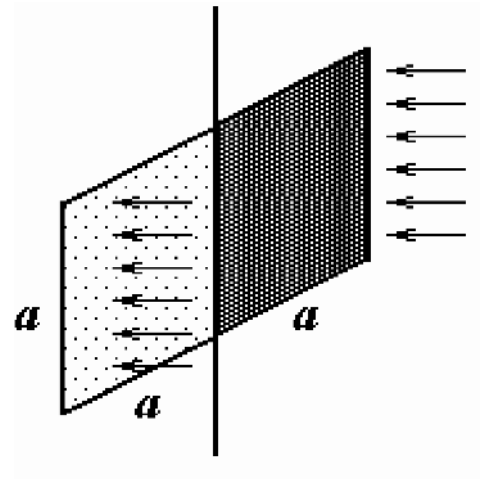
вертушка

Условие

Задача 9.

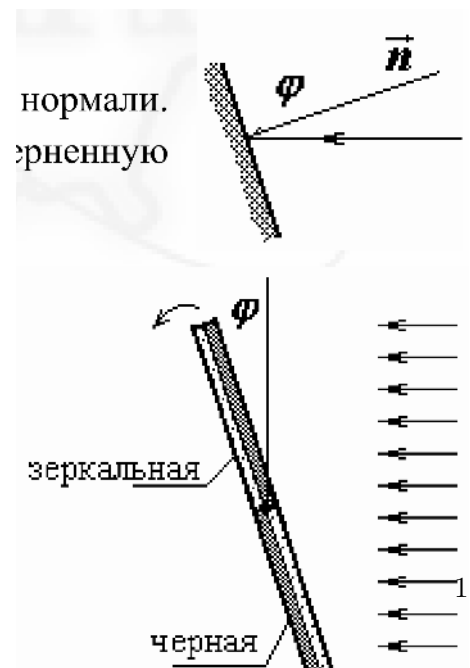
Для демонстрации существования давления света используется простой прибор - радиометр. Внутри стеклянной колбы, из которой откачан воздух, расположена легкая «вертушка», состоящая из нескольких лепестков, способная вращаться с очень малым трением вокруг вертикальной оси. Лепестки изготовлены из металлической фольги, одна сторона которой зеркальна, а вторая зачернена. Хорошо известно, что при нормальном падении давление света на зеркальную поверхность больше, чем на зачерненную, поэтому вертушка должна вращаться зачерненной стороной вперед.

Однако опыт показывает, что часто вертушка вращается в противоположном направлении. Ваша задача (с нашей помощью) - объяснить движение вертушки, при освещении ее светом. Рассмотрим упрощенную модель такого прибора: вертушка содержит только два алюминиевых лепестка, изготовленные в форме квадрата со стороной $a = 1,0$ см, одна из сторон лепестка прикреплена непосредственно к оси вращения. Толщина фольги $h = 1,0$ мм. Считайте, что одна сторона лепестков идеально зеркальная, а вторая абсолютно черная. Прибор освещается горизонтальным параллельным пучком света. Энергетическая интенсивность падающего света равна $I_0 = 1,2 \frac{\text{кВт}}{\text{м}^2}$. Скорость света принять равной $c = 3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Во всех пунктах, где это возможно, приведите также ответы в численном виде.



1. Чему равны силы давления света при нормальном падении на зеркальную и зачерненную стороны лепестка?
2. Пусть свет падает на поверхность под углом φ к нормали. Найдите силы, действующие на зеркальную и зачерненную стороны лепестка. 3. Будем называть начальным положение лепестков, при котором они расположены перпендикулярно падающему свету. Постройте график зависимости суммарного момента сил светового давления на вертушку от угла поворота вертушки. Положительным, считайте направление вращения против часовой стрелки (как показано на рисунке). Постройте график зависимости момента сил светового давления от угла поворота. Найдите среднее значение момента сил, усредненное по полному обороту вертушки. В какую сторону должна вращаться вертушка?

Основная причина вращения в «неправильном» направлении - наличие остаточного газа в колбе, давление которого



на пластинку зависит от температуры.

В колбе находится гелий при низком давлении $p = 50$ Па. Температуру газа в колбе считайте постоянной и равной $T_0 = 290$ К. Молярная масса гелия $\mu = 4,0 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$.

Будем считать, что вертушка вращается достаточно быстро, поэтому при расчете теплофизических характеристик можно проводить усреднение по полному обороту вертушки.

4. Найдите среднюю по одному обороту вертушки плотность потока теплоты, поглощаемого зачерненной стороной одного лепестка.

Плотность потока теплоты это количество передаваемой теплоты в единицу времени, на единицу площади $q = \frac{Q}{\Delta t \Delta S}$.

5. Если температура поверхности превышает температуру газа, то поверхность отдает теплоту окружающему газу. Плотность потока теплоты, отдаваемой газу пропорциональна разности температур поверхности $q = \beta(T - T_0)$, где β - коэффициент теплоотдачи. Считайте, что молекулы отраженные от нагретой поверхности имеют распределение скоростей, соответствующее температуре поверхности.

Вычислите коэффициент теплоотдачи, для газа, находящегося в рассматриваемой колбе.

6. Найдите среднюю температуру лепестка пластинки и разность температур зачерненной и зеркальной поверхностей.

Плотность потока теплоты через пластинку определяется законом $q = \gamma \frac{\Delta T}{h}$, где ΔT - разность температур различных сторон пластинки, γ - коэффициент теплопроводности, который для алюминия равен $\gamma = 205 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$.

7. Учитывая, что разные стороны лепестка имеют разность температур ΔT , оцените разность давлений газа на разные стороны лепестка. Оцените момент сил давления газа на вертушку.

8. Получите окончательную формулу для оценки отношения моментов сил давления света и газа. До какого давления следует откачать газ в колбе, чтобы «увидеть» давление света?

Решение

Задача 3.

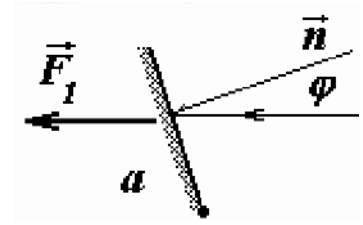
Первая часть данной задачи широко известна, поэтому ее решение приведем конспективно.

1. Сила давления света на зачерненную сторону лепестка при нормальном падении

$$F_1 = \frac{I_0}{c} a^2 = 0,40 \cdot 10^{-9} \text{ Н},$$

на зеркальную сторону в два раза больше

$$F_2 = 2 \frac{I_0}{c} a^2 = 0,80 \cdot 10^{-9} \text{ Н}.$$



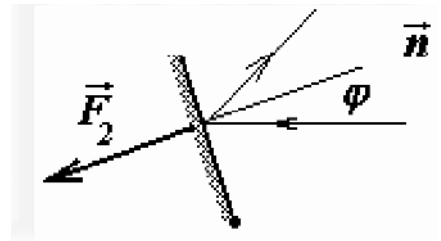
2. При повороте лепестков на угол φ сила давления уменьшается, так уменьшается количество света, падающего на лепесток. На зачерненную поверхность сила давления равна

$$F_1 = \frac{I_0}{c} a^2 \cos \varphi \quad (1)$$

и направлена по направлению падающего света.

При падении света на зеркальную поверхность сила направлена перпендикулярно пластинке и равна

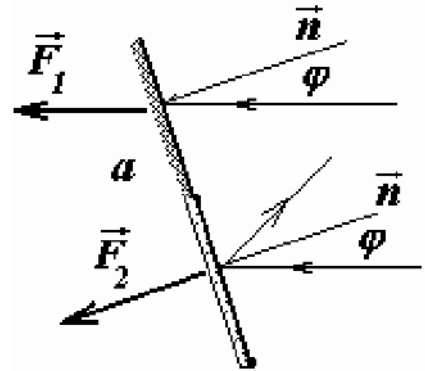
$$F_2 = 2 \frac{I_0}{c} a^2 \cos \varphi. \quad (2)$$



3. Так как силы светового давления равномерно распределены по поверхности пластинки, то для вычисления их момента можно считать, что суммарная сила приложена к центру пластинки.

Плечо силы, действующий на зачерненную сторону равен $\frac{a}{2} \cos \varphi$, ее момент (положительный)

$$M_1 = \frac{I_0}{c} a^2 \cos \varphi \cdot \frac{a}{2} \cos \varphi = \frac{I_0}{2c} a^3 \cos^2 \varphi. \quad (3)$$



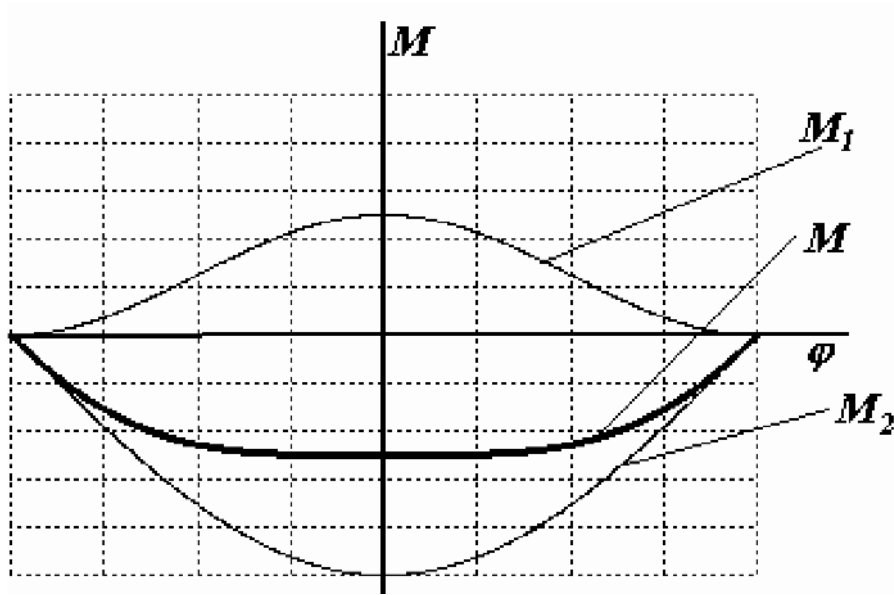
Плечо силы, действующей на зеркальную поверхность равно $\frac{a}{2}$, следовательно ее момент (отрицательный)

$$M_2 = 2 \frac{I_0}{c} a^2 \cos \varphi \cdot \frac{a}{2} = \frac{I_0}{c} a^3 \cos \varphi. \quad (4)$$

Суммарный момент сил, действующий на вертушку равен

$$M = M_1 - M_2 = \frac{I_0}{2c} a^3 (\cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi) \quad (5)$$

Для дальнейших расчетов заметим, что при повороте на пол оборота зеркальная и зачерненная стороны лепестков меняются местами, поэтому достаточно рассмотреть диапазон изменения угла в пределах $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$. Графики зависимостей моментов сил от угла поворота показаны на рисунке.



Таким образом, при любом положении лепестка момент сил светового давления отрицательный, то есть вертушка должна вращаться черной стороной вперед. Для вычисления среднего момента сил проведем усреднение угловой зависимости

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi) d\varphi = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi} \approx 0,77$$

Таким образом, средний момент силы равен

$$\langle M \rangle = 0,77 \frac{I_0}{2c} a^3 \approx 1,5 \cdot 10^{-12} \text{ Н} \cdot \text{м} \quad (5)$$

4. Плотность потока теплоты, при повороте лепестка на угол φ равен $q = I_0 \cos \varphi$, его среднее значение $q_0 = \frac{2}{\pi} I_0$.

5. В единицу времени на площадку единичной площади попадают $\nu = \frac{1}{4} n \langle v \rangle$ молекул. В среднем каждая молекула переносит энергию $\langle E_0 \rangle = \frac{3}{2} k T_0$, а уносит $\langle E \rangle = \frac{3}{2} k T$. Поэтому энергия, которая уносится газом с единицы площади в единицу времени равен

$$q = \nu \Delta \langle E \rangle = \frac{1}{4} n \langle v \rangle \cdot \frac{3}{2} k (T - T_0). \quad (6)$$

Следовательно, коэффициент теплоотдачи равен

$$\beta = \frac{1}{4} n \langle v \rangle \cdot \frac{3}{2} k = \frac{3}{8} \frac{p}{T_0} \sqrt{\frac{8 R T_0}{\pi \mu}} \approx 80 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}.$$

$$\frac{1}{4} n \langle v \rangle \cdot \frac{3}{2} k = \frac{3}{8} \frac{p}{T_0} \sqrt{\frac{8RT_0}{\pi\mu}} \approx 80 \frac{Bm}{m^2 \cdot K}.$$

у зачерненной стороны T_1 ,

и T_2 . Тогда в

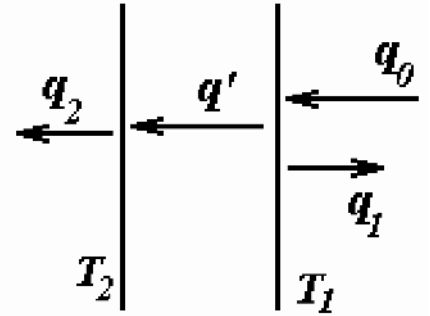
поток теплоты, падающий

тжен быть равен сумме

их с зачерненной q_1 и

$= q_1 + q_2$, или

(7)



6. Обозначим температуру зачерненной стороны T_1 , а температуру зеркальной T_2 . Тогда в установившемся режиме поток теплоты, падающий на пластину (свет) q_0 , должен быть равен сумме потоков теплоты уносимых с зачерненной q_1 и зеркальной q_2 сторон $q_0 = q_1 + q_2$, или

$$q_0 = \beta(T_1 + T_2 - 2T_0). \quad (7)$$

Кроме того, поток теплоты через пластинку q' равен потоку, q_2 :

$$\beta(T_2 - T_0) = \gamma \frac{T_1 - T_2}{h}. \quad (8)$$

Эти два уравнения позволяют найти температуры сторон. Так разность температур зачерненной и зеркальной сторон

$$T_1 - T_2 = \frac{q_0}{\beta + 2\frac{\gamma}{h}} = \frac{2}{\pi} \frac{q_0}{\beta + 2\frac{\gamma}{h}} \approx 1,9 \cdot 10^{-3} K.$$

Температуру пластинки можно найти из условия равенства потоков падающей и уносимой газом теплоты $q_0 = 2\beta(T - T_0)$, откуда

$$T = T_0 + \frac{q_0}{2\beta} \approx 300 K. \quad (9)$$

7. Разность давлений можно оценить, считая по-прежнему, что молекулы отраженные поверхностью имеют распределение скоростей, соответствующее температуре поверхности. Поэтому импульс, переданный пластинке при одном ударе молекулы $\Delta p' = m(v_{n0} + v_n)$, где v_{n0}, v_n - нормальные компоненты скоростей молекул до удара и после удара. Суммарное давление можно получить, умножив полученное значение импульса на среднее число ударов. Разность давлений можно определяется разностью средних скоростей молекул, отраженных от разных сторон лепестков, а эти скорости пропорциональны корню квадратному из температуры, поэтому

$$\Delta P = \nu m (v_{n1} - v_{n2}) = \frac{p}{\sqrt{T}} (\sqrt{T + \Delta T} - \sqrt{T})$$

Учитывая, что разность температур сторон лепестков мала, последнее выражение можно упростить

$$\Delta P = \frac{p}{\sqrt{T}}(\sqrt{T + \Delta T} - \sqrt{T}) \approx p \frac{\Delta T}{2T} \approx 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ Па.}$$

Силы давления газа направлены перпендикулярно поверхности, поэтому момент сил, действующих на вертушку со стороны газа равен

$$M = 2\Delta P \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2} = \Delta P \cdot a^3 \approx 1,6 \cdot 10^{-10} \text{ Н} \cdot \text{м}$$

Что на два порядка превышает момент сил давления газа.

8. Для оценки момента сил светового давления $\langle M \rangle \approx \frac{I_0}{2c} a^3$. Момент сил давления газа также может быть оценен достаточно быстро:

аргументация для вывода разности давлений была приведена ранее $\Delta P \approx p \frac{\Delta T}{2T}$;

оценка разности температур $\Delta T \approx \frac{2I_0 h}{\gamma}$ следует из таких рассуждений:

приблизительно половина потока теплоты, падающего на пластинку, должна быть перенесена на ее противоположную сторону.

Таким образом $M_{\text{газа}} \approx \frac{I_0 h P a^3}{T \gamma}$, а их отношение $\frac{M_{\text{св}}}{M_{\text{газа}}} \approx \frac{\gamma T}{2chP}$.

Следовательно, давление газа в сосуде должно быть меньше, чем (из условия $M_{\text{св}} \approx M_{\text{газа}}$) $P \approx \frac{\gamma T}{2ch} \approx 0,1 \text{ Па.}$