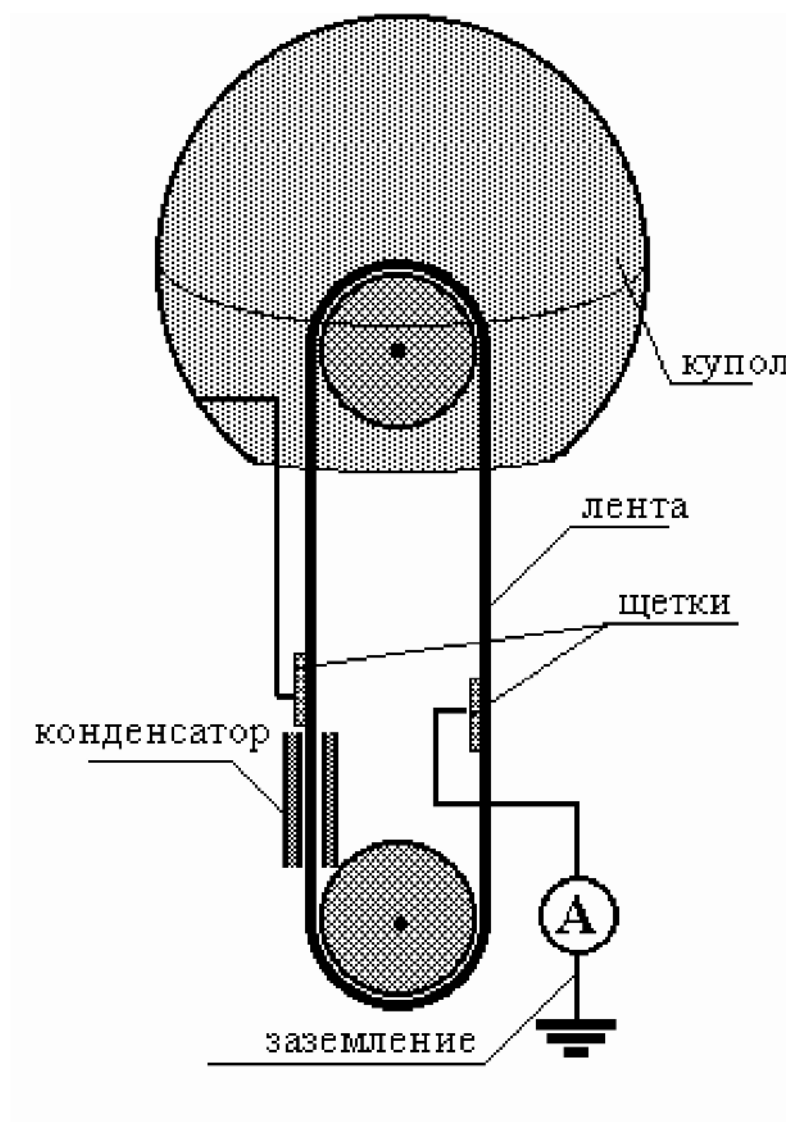


Условие



Задача 4. В генераторе Ван-дер-Граафа лента (см. рис) толщиной h и шириной a , выполненная из материала с диэлектрической проницаемостью ε , приводится в движение с небольшой скоростью v электродвигателем. При движении лента проходит между обкладками плоского конденсатора, раздвинутыми на небольшое расстояние d , не касаясь их. На конденсатор подается напряжение U . Возникшие на ленте поляризационные заряды снимаются с внешней поверхности ленты с помощью щетки (со стороны отрицательной обкладки конденсатора) и подаются на внутреннюю поверхность металлического купола генератора, создавая достаточно сильные электростатические поля (высокие напряжения) в окружающем купол пространстве. Заряды с внутренней стороны ленты отводятся через шину заземления. При расчетах примите, что купол является «полной» сферой радиуса R , диэлектрическая проницаемость воздуха $\varepsilon \approx 1$.

Найдите:

1) поверхностную плотность σ' поляризационных зарядов на ленте при выходе из конденсатора;

2) заряд металлической сферы генератора $q(t)$ через время t после начала его работы. Считайте, что все поляризационные заряды снимаются с ленты на выходе из конденсатора. Потерь заряда нет.

3) силу тока в шине заземления I_3 ;

4) используя закон Ома в дифференциальной форме ($\vec{j} = \frac{1}{\rho} \cdot \vec{E}$), найдите установившийся заряд q^* на сфере генератора в предположении, что воздух — слабопроводящая среда с удельным сопротивлением ρ .

5) при достаточно больших напряжениях вокруг сферы генератора может наблюдаться коронный разряд. Найдите установившийся заряд q^{**} на сфере генератора при коронном разряде, если связь между плотностью тока и напряженностью поля в этом случае имеет приближенный вид $\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} + \beta \vec{E} |\vec{E}|$, где β — известная постоянная.

Решение



Задача 4.

1) Для нахождения поверхностной плотности σ' поляризационных зарядов на ленте при выходе из конденсатора будем считать, что вследствие малости скорости движения ленты генератора распределение зарядов на ней будет таким же, как и на неподвижной пластине такой же толщины из такого же диэлектрика, внесенной в конденсатор. Пусть напряженность поля внутри конденсатора вне пластины E , тогда внутри пластины — $E_1 = \frac{E}{\varepsilon}$. Тогда для разности потенциалов между обкладками (она в данном случае равна напряжению) можем записать

$$U = E(d - h) + \frac{E}{\varepsilon} h \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\varepsilon U}{(d - h)\varepsilon + h}. \quad (1)$$

Соответственно в диэлектрике модуль напряженности электростатического поля меньше в ε раз

$$E_1 = \frac{U}{(d - h)\varepsilon + h}.$$

С другой стороны, согласно принципу суперпозиции поле в диэлектрике можно рассматривать как сумму внешнего поля $\vec{E}$ и поля индуцированных (поляризационных) зарядов $\vec{E}'$

$$E_1 = \frac{E}{\varepsilon} = E + E' \quad \Rightarrow \quad E' = -E \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}. \quad (1)$$

Знак «-» в (1) указывает на противоположность направлений полей (а значит и знаков поверхностных плотностей зарядов) конденсатора и поляризационных зарядов. Поскольку лента внутри конденсатора тоже имеет две плоские поверхности, то окончательно имеем

$$\sigma' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon U}{\varepsilon(d - h) + h} = -\varepsilon_0 \frac{(\varepsilon - 1)U}{\varepsilon(d - h) + h}. \quad (2)$$

Поскольку щетки купола генератора расположены со стороны отрицательной обкладки конденсатора ($U < 0$), то как видим из (2) заряд ленты (и купола) будет положительным и знак «-» в (2) далее можно опустить. 2) Как видно из схемы генератора поляризационные заряды, снятые с помощью щеток с ленты, подаются на внутреннюю поверхность купола. Однако на проводнике статические заряды могут располагаться только на его поверхности. Следовательно, в течение достаточно малого промежутка времени все заряды в генераторе «переберутся» на внешнюю поверхность купола, освобождая «место» для новой порции заряда с ленты. Поскольку потерь заряда нет, то за время t на сфере генератора окажется суммарный заряд $q(t)$, «принесенный» лентой длиной $l(t) = v \cdot t$, заряженной с поверхностной плотностью σ'

$$q(t) = \sigma' \cdot S(t) = \sigma a l(t) = \varepsilon_0 a v t \frac{(\varepsilon - 1)U}{\varepsilon(d - h) + h}. \quad (3)$$

Как видим из (3) в отсутствие потерь заряд генератора Ван-дер-Граафа прямо пропорционален времени его работы. На практике это означало бы, что с его помощью можно было бы получать бесконечные напряжения и напряженности полей, чего, конечно же, не происходит вследствие различного рода потерь. 3) Заряды противоположного знака (с внутренней стороны ленты) но такие же по величине (согласно закону сохранения заряда) стекают по шине заземления. Следовательно, сила тока заземления I_3

$$I_3 = \frac{q(t)}{t} = -\varepsilon_0 a v \frac{(\varepsilon - 1)U}{\varepsilon(d - h) + h}. \quad (4)$$

4) Рассмотрим подробнее механизм потерь заряда с купола генератора. По мере роста заряда генератора $q(t)$ увеличивается модуль напряженности электростатического поля $\vec{E}(t)$ в воздухе ($\varepsilon \approx 1$) вокруг купола. Поскольку воздух можно считать слабопроводящей средой, то согласно закону Ома в дифференциальной форме увеличивается и модуль плотности тока утечки $\vec{j}(t)$ через воздух. Если радиус купола R , то для силы тока утечки находим

$$I(t) = j(t) 4\pi R^2 = \left\{ j(t) = \frac{1}{\rho} E(t); E(t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q(t)}{R^2} \right\} = \frac{1}{\rho} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q(t)}{R^2} 4\pi R^2 = \frac{q(t)}{\rho\varepsilon_0}. \quad (5)$$

Заряд купола перестанет меняться, когда сила тока зарядки купола (равная по модулю силе тока заземления I_3) станет равной силе тока утечки $I(t)$ через воздух. Таким образом, для установившегося заряда купола q^* имеем

$$\frac{q^*}{\rho\varepsilon_0} = \varepsilon_0 a v \frac{(\varepsilon - 1)U}{\varepsilon(d - h) + h} \Rightarrow q^* = \varepsilon_0^2 \rho a v \frac{(\varepsilon - 1)U}{\varepsilon(d - h) + h}. \quad (6)$$

Подчеркнем, что на практике установившееся значение заряда купола генератора q^* достигается достаточно быстро — именно поэтому генератор Ван-дер-Граафа является источником сильных электростатических полей.

5) при зажигании коронного разряда (фантастическое зрелище, слабонервных просим не смотреть!) изменится значение тока утечки (5)

$$I(t) = j(t)4\pi R^2 = \left(\frac{1}{\rho} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(t)}{R^2} + \beta \frac{1}{16\pi^2\epsilon_0^2} \frac{q^2(t)}{R^4} \right) 4\pi R^2 = \frac{q(t)}{\rho\epsilon_0} + \beta \frac{q^2(t)}{4\pi\epsilon_0^2 R^2}.$$

(7)

Соответственно в этом случае установившееся значение заряда на куполе генератора q^{**} найдем из квадратного уравнения

$$\frac{q(t)}{\rho\epsilon_0} + \beta \frac{q^2(t)}{4\pi\epsilon_0^2 R^2} = I_3 = \epsilon_0 av \frac{(\epsilon - 1)U}{\epsilon(d - h) + h}. \quad (8)$$

$$q^{**} = -\frac{2\pi\epsilon_0 R^2}{\rho\beta} \pm \sqrt{\frac{4\pi^2\epsilon_0^2 R^4}{\rho^2\beta^2} + \frac{4\pi\epsilon_0^2 R^2 I_3}{\beta}} \quad (9)$$

Как видим из (9) один из корней отрицательный (не имеет физического смысла, поскольку при этом заряды должны сами «стекаться» к куполу и «самопроизвольно» заряжать его).

Следовательно, окончательный ответ

$$q^{**} = \sqrt{\frac{4\pi^2\epsilon_0^2 R^4}{\rho^2\beta^2} + \frac{4\pi\epsilon_0^3 R^2}{\beta} \cdot \frac{av(\epsilon - 1)U}{\epsilon(d - h) + h}} - \frac{2\pi\epsilon_0 R^2}{\rho\beta}.$$