



**Белорусская  
республиканская физическая олимпиада  
Мозырь, 2002 год**

**Решения задач.**

**9 класс.**

9.1 По определению, средней скоростью называется отношение пройденного пути ко времени движения  $\langle v \rangle = \frac{S}{t}$ , а средним ускорением отношение изменения скорости ко времени, за которое это изменение произошло  $\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ .

а) Обозначим все время движение точки  $\tau$ . Тогда средняя скорость может быть рассчитана по формуле

$$\langle v \rangle = \frac{v_1 \frac{\tau}{2} + v_2 \frac{\tau}{2}}{\tau} = \frac{v_1 + v_2}{2}. \quad (1)$$

Изменение скорости  $\Delta v = v_2 - v_1$ , произошло за время движения  $\tau = \frac{S}{\langle v \rangle} = \frac{2S}{v_1 + v_2}$ , поэтому среднее ускорение

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\tau} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2S}. \quad (2)$$

б) В этом случае время движения  $\tau = \frac{S}{2v_1} + \frac{S}{2v_2} = \frac{S}{2} \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}$ , поэтому средняя скорость

$$\langle v \rangle = \frac{S}{\tau} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}, \quad (3)$$

а среднее ускорение

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\tau} = \frac{2v_1 v_2 (v_2 - v_1)}{S(v_2 + v_1)}. \quad (4)$$

в) Учитывая, что начальная скорость точки на первом участке равна нулю, а начальная скорость на втором участке равна конечной скорости первого участка, запишем выражение для пройденного пути

$$S = \frac{a_1 \left(\frac{\tau}{2}\right)^2}{2} + a_1 \left(\frac{\tau}{2}\right) \cdot \left(\frac{\tau}{2}\right) + \frac{a_2 \left(\frac{\tau}{2}\right)^2}{2} = \frac{\tau^2}{8} (3a_1 + a_2),$$

из которого определим время движения

$$\tau = \sqrt{\frac{8S}{3a_1 + a_2}}. \quad (5)$$

Таким образом, средняя скорость в этом случае

$$\langle v \rangle = \frac{S}{\tau} = \sqrt{\frac{S(3a_1 + a_2)}{8}}. \quad (6)$$

Изменение скорости на всем пути определяется формулой

$\Delta v = a_1 \frac{\tau}{2} + a_2 \frac{\tau}{2}$ , поэтому среднее ускорение в этом случае равно

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\tau} = \frac{a_1 + a_2}{2}. \quad (7)$$

г) Пусть первую половину пути точка прошла за время  $\tau_1$ , которое можно определить из формулы

$$\frac{S}{2} = \frac{a_1 \tau_1^2}{2} \Rightarrow \tau_1 = \sqrt{\frac{S}{a_1}}. \quad (8)$$

Для второго участка пути справедливо соотношение  $\frac{S}{2} = a_1 \tau_1 \tau_2 + \frac{a_2 \tau_2^2}{2}$ , из которого найдем время движения на втором участке (с учетом формулы (8))

$$\tau_2 = \sqrt{S} \frac{\sqrt{a_1 + a_2} - \sqrt{a_1}}{a_2}. \quad (9)$$

Теперь можно найти среднюю скорость

$$\langle v \rangle = \frac{S}{\tau_1 + \tau_2} = \sqrt{a_1 S} \frac{a_2}{a_2 - a_1 + \sqrt{a_1(a_2 + a_1)}} \quad (10)$$

и среднее ускорение

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{a_1 \tau_1 + a_2 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{a_2 \sqrt{a_1(a_2 + a_1)}}{a_2 - a_1 + \sqrt{a_1(a_2 + a_1)}}. \quad (11)$$

9.2 Основная проблема, возникающая при реализации описанной ситуации (замораживании воды), заключается в «утилизации» большого количества теплоты, выделяющейся при кристаллизации. Действительно, при замерзании воды выделится количество теплоты  $Q_1 = \lambda m_0 = 330 \text{ кДж}$ . На нагревание этой же воды может пойти количество теплоты  $Q_2 = c_0 m_0 (t_{kp} - t_0) \approx 21 \text{ кДж}$ , где  $t_{kp} = 0^\circ \text{C}$  - температура кристаллизации воды при нормальном давлении. Поэтому оставшееся количество теплоты  $Q_1 - Q_2$  должно пойти на нагреваемого льда (но при этом он не должен расплавиться!). Таким

образом, для замораживания всей воды должно выполняться следующее уравнение теплового баланса

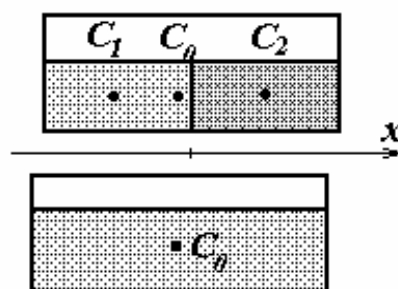
$$Q_1 - Q_2 = c_1 m_x (t_{кр} - t_1),$$

из которого находим искомую массу льда

$$m_x = \frac{Q_1 - Q_2}{c_1 m_x (t_{кр} - t_1)} \approx 7,4 \text{ кг}.$$

9.3 Для решения задачи необходимо заметить, что на рассматриваемую систему не действуют внешние силы, имеющие горизонтальные составляющие. Поэтому горизонтальная координата центра масс не может измениться при любых процессах, проходящих внутри системы.

Очевидно, что после плавления льда центр масс сосуда будет находиться на середине сосуда. Найдем горизонтальную координату  $x_0$  центра масс системы в начальном состоянии.



$$x_0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad (1)$$

где  $x_1 = -l/4$ ,  $x_2 = +l/4$  координаты центров масс воды и льда, соответственно;  $m_1 = \rho_1 S \frac{l}{2}$ ,  $m_2 = \rho_2 S \frac{l}{2}$  - массы воды и льда,  $S$  - площадь поперечного сечения сосуда. Подставив эти значения в формулу (1) получим

$$x_0 = -\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \cdot \frac{l}{2}, \quad (2)$$

на такую же величину сместится сосуд после плавления льда и установления равновесия воды в сосуде.

9.4 Равномерное движение пузырька обеспечивается равенством сил, действующих на него. Так, при неподвижной трубке сила Архимеда уравновешивается силой вязкого трения

$$\rho g V = \beta v_0, \quad (1)$$

где  $V$  - объем пузырька. При подъеме трубки с постоянным ускорением в это уравнение пример вид (проще всего обосновать это выражение, перейдя в неинерциальную систему отсчета, связанную с трубкой):

$$\rho(g + a)V = \beta v_1. \quad (2)$$

Из выражений (1)-(2) находим скорость установившегося движения пузырька

$$v_1 = v_0 \frac{g + a}{g}. \quad (3)$$

Формула (3) применима для любых ускорений трубки, поэтому легко заметить, что скорость пузырька станет равной  $-v_0$ , при ускорении трубки равном  $-2g$ , то есть при движении вниз с ускорением в два раза большем ускорения свободного падения.

9.5 а) размерности коэффициентов следуют из вида приведенных формул:  $[R_0] = \text{Ом}$ ;  $[\alpha] = \text{град}^{-1}$ ;  $[\beta] = \frac{[P]}{[t]} = \frac{\text{Вт}}{\text{град}}$ .

б) В установившемся режиме мощность теплоты, выделяющейся при прохождении тока через проводник (которая определяется законом Джоуля-Ленца), равна мощности теплоты, отдаваемой проводником в окружающую среду

$$\frac{U^2}{R_0(1 - \alpha t)} = \beta t. \quad (1)$$

Это уравнение является квадратным относительно неизвестной установившейся температуры. Решение этого уравнения имеет вид

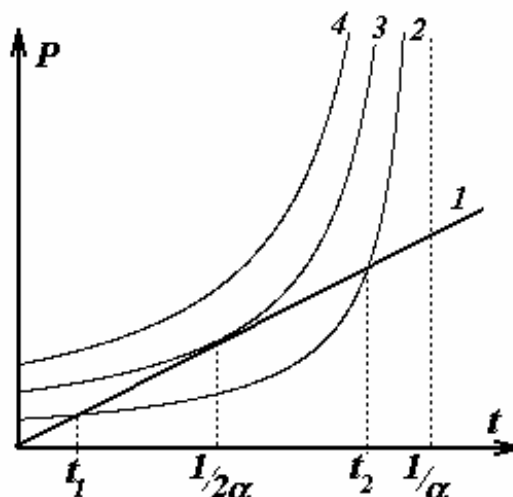
$$t = \frac{1}{2\alpha} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{U^2}{U_0^2}} \right), \quad (2)$$

где обозначено  $U_0 = \sqrt{\frac{R_0 \beta}{4\alpha}}$ .

В зависимости от приложенного напряжения  $U$ , уравнение (1) имеет либо два корня (при  $U < U_0$ ); либо один корень (при  $U = U_0$ ); либо корней не имеет (при  $U > U_0$ ).

Чтобы уяснить физический смысл полученных результатов и выбрать нужное значение корня представим уравнение (1) в графической форме: изобразим примерные графики зависимости рассматриваемых мощностей от температуры проводника.

Прямая 1 является зависимостью мощности теплоты, отдаваемой в среду, кривые 2,3,4 - зависимости мощностей, выделяемых в проводнике, построенные при разных значениях напряжения источника.



Кривая 2 соответствует наличию двух корней  $t_1, t_2$  уравнения 1. Можно заметить, что корень  $t_1$  является устойчивым: при  $t < t_1$  мощность, выделяющаяся в проводнике, превосходит мощность, отдаваемую в среду, поэтому проводник будет нагреваться; при  $t > t_1$  ситуация обратная, поэтому проводник будет остывать до температуры  $t_1$ . Корень  $t_2$  - неустойчив: при  $t < t_2$  проводник будет остывать до температуры  $t_1$ ; при  $t > t_2$  проводник будет разогреваться до бесконечности, так на этом этапе мощность, выделяемая в проводнике, возрастает быстрее мощности, отдаваемой в среду.

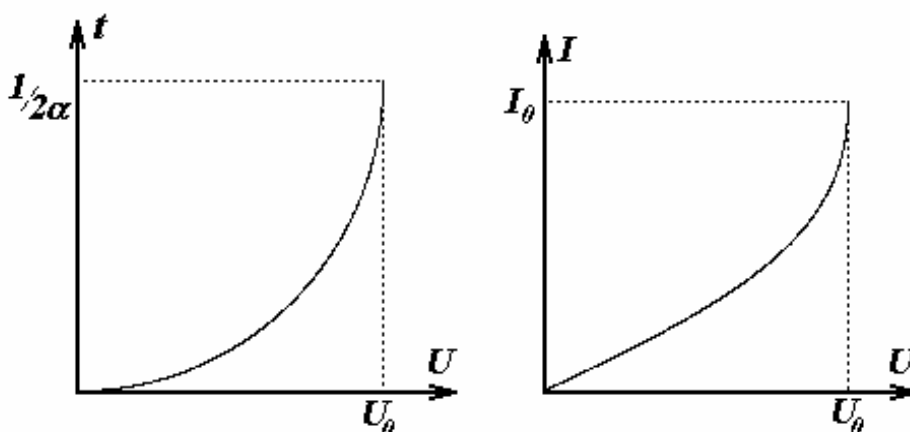
Кривая 3 построена для случая единственного корня, который как видно из графика неустойчив - проводник будет разогреваться.

Отсутствие корней иллюстрирует кривая 4 - в этом случае отсутствует равновесное значение температуры - при любом ее значении проводник разогревается быстрее, чем остывает.

Таким образом, при  $U < U_0$  установившаяся температура

определяется формулой  $t_1 = \frac{1}{2\alpha} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{U^2}{U_0^2}} \right)$ , если начальная

температура проводника меньше, чем  $t_2 = \frac{1}{2\alpha} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{U^2}{U_0^2}} \right)$ . В



остальных случаях установившейся температуры не существует - проводник неограниченно разогревается. Примерный график рассмотренной зависимости  $t(U)$  показан на рисунке.

в) зависимость силы тока от напряжения легко получить, используя закон Ома и зависимость температуры от приложенного напряжения:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{R_0(1 - \alpha t)} = \frac{2U}{R_0 \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{U^2}{U_0^2}} \right)}.$$

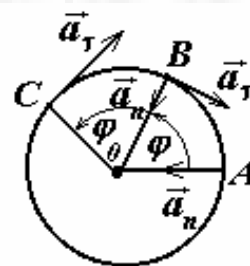
Примерный график этой зависимости  $I(U)$  также показан на рисунке.

## **10 класс.**

10.1 Крутильные колебания диска описываются функцией

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega t, \quad (1)$$

где  $\varphi$  - угол отклонения от положения равновесия,  $\varphi_0$  - угловая амплитуда колебаний,  $\omega$  - круговая частота колебаний. Рассмотрим движение произвольной точки диска,



находящейся на расстоянии  $R$  от оси вращения. В произвольном положении ее ускорение складывается из двух составляющих: тангенциальной  $\vec{a}_\tau$  - направленной по касательной к траектории и связанной с изменением модуля скорости движения; нормальной  $\vec{a}_n$  - направленной к центру вращения и связанной с изменением направления вектора скорости, которая в данном случае является центростремительным ускорением.

Из закона движения (1) следует, что угловая скорость вращения изменяется по закону  $\Omega = -\omega \varphi_0 \sin \omega t$ , а угловое ускорение

$$\beta = -\omega^2 \varphi_0 \cos \omega t.$$

В положениях максимального отклонения скорости рассматриваемой точки равны нулю, поэтому равно нулю и нормальное ускорение. Следовательно, в этих положениях полное ускорение совпадает с тангенциальным

$$a_1 = a_\tau = R\beta = -R\omega^2 \varphi_0. \quad (2)$$

При прохождении положения равновесия скорость точки максимальна, поэтому тангенциальное ускорение равно нулю, а полное ускорение равно нормальному

$$a_2 = a_n = R\Omega^2 = R\omega^2\varphi_0^2. \quad (3)$$

Приравнивая модули ускорений  $a_1, a_2$  находим, что требуемое условие будет выполняться для произвольной точки диска при единичной угловой амплитуде колебаний  $\varphi_0 = 1 \text{ рад} \approx 57^\circ$ .

10.2 Будем задавать расположение гвоздя  $C$  с помощью полярных координат:  $r$  - расстояния от него до точки подвеса  $A$  и  $\beta$  - угла между вертикалью и отрезком  $AC$ . Траектория шарика состоит из дуги окружности радиуса  $l$  (до касания нити о гвоздь) и соприкасающейся окружности радиуса  $l - r$  (после того, как нить начала наматываться на гвоздь). Чтобы шарик сделал полный оборот вокруг гвоздя, необходимо согласно 2 закону Ньютона, что бы в верхней точке окружности выполнялось условие

$$\frac{mv^2}{l-r} \geq mg. \quad (1)$$

Так как шарик сохраняет свою механическую энергию, то его скорость в этой точке можно найти из равенства

$$\frac{mv^2}{2} = mg(r \cos \beta - l + r), \quad (2)$$

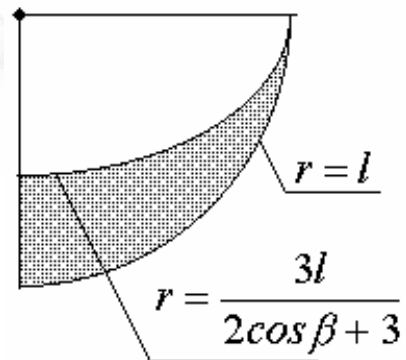
где  $(r \cos \beta - l + r)$  изменение высоты шарика. Объединяя (1) и (2), получим неравенство

$$\frac{2mg(r \cos \beta - l + r)}{l-r} \geq mg \quad (3)$$

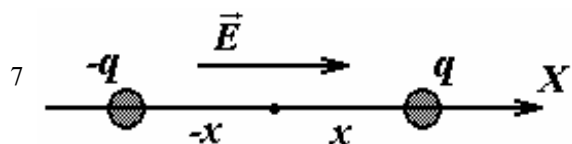
и преобразуем его к виду

$$r \geq \frac{3l}{2 \cos \beta + 3}. \quad (4)$$

Линия ограничивающая эту область является дугой эллипса. Кроме того, понятно, что  $r < l$  (граница этой области - окружность). Область, точки которой удовлетворяют условию задачи, показана на рисунке.



10.3 Под действием внешнего электрического поля шарики приобретут электрические заряды, которые будут изменяться по мере изменения расстояния между шариками. Взаимодействие этих зарядов с электрическим полем приведет к появлению сил, которые и будут разгонять шарики. Введем ось  $X$ , как показано на рисунке и



найдем зависимость величины зарядов шариков от их координат. Понятно, что шарики будут двигаться симметрично, а их заряды будут равны по модулю и противоположны по знаку.

Заряды шариков найдем из условия равенства их потенциалов

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} - Ex = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} + Ex. \quad (1)$$

В этом соотношении учтено, что радиусы шариков малы, поэтому взаимовлияние зарядов шариков друг на друга пренебрежимо мало.

Из соотношения (1) следует, что

$$q = 4\pi\epsilon_0 a Ex. \quad (2)$$

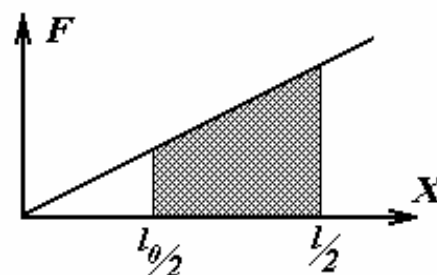
Сила, действующая на каждый шарик, пропорциональна их координате и равна

$$F = qE = 4\pi\epsilon_0 a E^2 x. \quad (3)$$

Из полученного соотношения следует, что скорости шариков будут максимальны, когда они разъедутся на максимальное расстояние. Работа силы, действующей на шарик, равна его кинетической энергии:

$A = \frac{mv^2}{2}$ . Ее можно подсчитать

графически, как площадь под графиком зависимости силы от координаты шарика.



Простой подсчет приводит к следующему результату

$$v = \sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 a E^2 (l^2 - l_0^2)}{m}}.$$

10.4 Вращение заряженного цилиндра эквивалентно существованию кругового электрического тока. Как известно, индукция магнитного поля внутри соленоида рассчитывается по формуле

$$B = \mu_0 n I, \quad (1)$$

где  $n$  - плотность катушки,  $I$  - сила тока через катушку. Произведение  $nI$  можно рассматривать как поверхностную плотность тока - заряд, протекающий в единицу времени через единицу длины боковой поверхности цилиндра. При вращении равномерно заряженного цилиндра поверхностная плотность тока может быть представлена в виде  $\sigma v = \sigma R \omega$ , где  $\omega$  - угловая скорость вращения цилиндра.



Следовательно, в соответствии с формулой (1) индукция магнитного поля внутри вращающегося заряженного цилиндра определяется выражением

$$B = \mu_0 \sigma R \omega . \quad (2)$$

При изменении скорости вращения (что неизбежно во время раскручивания) изменяется величина индукции поля, что в следствие явления электромагнитной индукции приводит к возникновению вихревого электрического поля. По закону Фарадея скорость изменения магнитного потока равна ЭДС индукции возникающего в контуре. Принимая во внимание осевую симметрию задачи и считая магнитное поле однородным, этот закон можно выразить в виде уравнения

$$2\pi r E = -\pi r^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} = -\pi r^2 \mu_0 \sigma R \frac{\Delta \omega}{\Delta t} , \quad (3)$$

из которого следует выражение для напряженности вихревого электрического поля

$$E = -\pi r^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} = -\frac{r \mu_0 \sigma R}{2} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} . \quad (4)$$

Это поле действует на заря кольца, приводя к появлению момента сил, раскручивающего кольца. Корректное рассмотрение сил, действующих на отдельные малые элементы кольца, приводит к следующему выражению для изменения его угловой скорости

$$mr \frac{\Delta \omega_1}{\Delta t} = qE . \quad (5)$$

Подставим выражение для напряженности вихревого поля (4) в уравнение (5), получим

$$\frac{\Delta \omega_1}{\Delta t} = -\frac{\mu_0 \sigma R q}{2m} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} . \quad (6)$$

Как следует из этого уравнения угловые ускорения цилиндра и кольца пропорциональны, следовательно (с учетом нулевых начальных условий), пропорциональны и угловые скорости вращения цилиндра и кольца, то есть

$$\omega_1 = -\frac{\mu_0 \sigma R q}{2m} \omega_0 . \quad (7)$$

Знак минус в полученном выражении указывает, что при одноименных зарядах кольца и цилиндра, кольцо будет вращаться в сторону, противоположную вращению цилиндра, в полном соответствии с правилом Ленца.

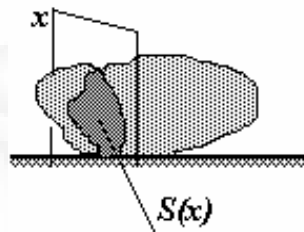
10.5 Возникновение силы, действующей на тела со стороны волны, обусловлено разностью давлений с противоположных сторон тела.

Поэтому эта сила действует только во время прохождения фронтов (как переднего, так и заднего) ударной волны.

5.1 Для определения скорости льдины после прохождения переднего фронта найдем, воспользовавшись 2 законом Ньютона в известной формулировке: изменение импульса тела равно импульсу силы -

$$m\Delta v = \sum F_i \Delta t_i . \quad (1)$$

В этой записи учтено, что действующая сила переменна, кроме того мы пренебрегаем смещением льдины за время прохождения переднего фронта ударной волны. Пусть координата переднего фронта волны равна  $x$  и площадь поперечного сечения льдины в этой плоскости равна  $S(x)$ . Тогда сила давления волны на льдину в этот момент времени будет равна  $F = \Delta P S(x)$ . Величина интервала



времени прохождения участка длиной  $\Delta x_i$  выразим с помощью очевидного соотношения  $\Delta t_i = \frac{\Delta x_i}{c}$ . Тогда импульс силы представляется в виде

$$m\Delta v = \sum F_i \Delta t_i = \sum_i \Delta P S(x_i) \frac{\Delta x_i}{c} = \frac{\Delta P}{c} \sum_i S(x_i) \Delta x_i .$$

Стоящее под знаком суммы выражение является объемом тела, поэтому изменение скорости тела при прохождении фронта волны описывается формулой

$$\Delta v = \frac{\Delta P}{c\rho} . \quad (2)$$

Здесь мы пренебрегаем импульсом силы трения из-за малости последней, по сравнению с силами давления. Так как до прихода волны льдина покоилась, то после прохождения переднего фронта она будет иметь скорость  $v_0 = \frac{\Delta P}{c\rho} \approx 1,85 \frac{M}{c}$ . Заметим, что эта скорость много меньше скорости волны, что будет использовано в дальнейшем.

5.2 При скольжении по льду, глыба льда будет двигаться с ускорением, возникающем из-за действия силы трения  $a = -\mu g$ . Определим, успеет ли льдина остановиться до прихода заднего фронта волны. За время прохождения волны  $\tau = \frac{L}{c} = 1,0c$ , скорость

льдины уменьшится до  $v_1 = v_0 - \mu g \tau \approx 1,65 \frac{M}{c}$ , то есть к приходу

заднего фронта льдина будет двигаться и доэтого момента пройдет путь

$$S_1 = v_0 \tau - \frac{\mu g \tau^2}{2} \approx 1,75 \text{ м} . \quad (3)$$

Это и будет максимальным смещением льдины.

5.3 После прохождения заднего фронта волны льдина получит импульс в противоположном направлении, при этом ее скорость изменится на величину, определяемую формулой (2). Следовательно ее скорость станет равной

$$v_2 = v_1 - \Delta v = v_0 - \mu g \tau - \Delta v = -\mu g \tau . \quad (4)$$

При такой начальной скорости льдина пройдет до остановки путь

$$S_2 = \frac{v_2^2}{2\mu g} = \frac{\mu g \tau^2}{2} \approx 0,10 \text{ м} .$$

Таким образом, льдина окажется смещенной на величину  $S_1 - S_2 \approx 1,65 \text{ м}$ .

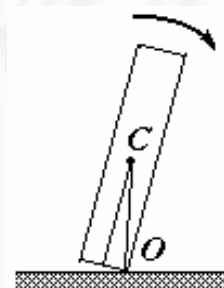
5.4 Падение стены является вращением вокруг оси  $O$ , проходящей через нижнее ребро блока, поэтому в дальнейшем все моменты сил будем рассчитывать относительно этой оси.

Сила, давления ударной волны на блок, равная

$$F = \Delta P S = \Delta P l h \quad (1)$$

( $S$  - площадь стены,  $l$  - ее длина), действует в

течении промежутка времени  $\tau = \frac{a}{c} \approx 10^{-3} \text{ с}$ .



Прежде всего, момент силы давления на блок  $M_1 = F \frac{h}{2} = \Delta P l \frac{h^2}{2}$ ,

должен превысить момент силы тяжести  $M_2 = mg \frac{a}{2} = \rho g l h \frac{a^2}{2}$ , что

будет выполняться при

$$h > \frac{\rho g a^2}{\Delta P} \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{ м} .$$

Далее необходимо учесть, что сила давления действует в течении очень малого промежутка времени, поэтому необходимо рассмотреть и другие необходимые условия опрокидывания. Так энергии полученной блок должно хватить, чтобы «поставить блок на ребро», то есть поднять центр тяжести блока над ось вращения.

Для строго расчета необходимо использовать уравнения динамики вращательного движения. Для проведения оценок будем считать, что вся масса блока сосредоточена в его центре масс.

Скорость центра масс можно оценить из уравнения 2 закона Ньютона (полагая, что за время  $\tau$  можно пренебречь смещением блока),

$$F\tau = mV_c \Rightarrow V_c = \frac{\Delta P}{\rho c}. \quad (2)$$

Кинетическая энергия, приобретенная блоком, должна быть равна изменению потенциальной энергии при подъеме блока «на ребро». При этом изменение высоты центра масс рассчитывается по формуле

$$\Delta h_c = \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{h}{2} \approx \frac{a^2}{4h}, \quad (3)$$

здесь использовано предположение о малости ширины блока, по сравнению с его высотой.

Итак, энергетическое условие опрокидывания имеет вид

$$\frac{mV_c^2}{2} > mg\Delta h_c \Rightarrow h > 2g\left(\frac{\rho ca}{\Delta p}\right)^2 \approx 6\text{ м}.$$

Полученное значение оправдывает сделанное при выводе предположение о малости ширины блока, по сравнению с его высотой.

## **11 класс.**

11.1 Трюк не удастся, если стакан упадет со стола. Для успеха необходимо, чтобы за время движения платка стакан не успел достичь края стола. Платок движется с постоянной скоростью  $v_0$ , следовательно время его движения  $t = \frac{l}{v_0}$ . Стакан движется под

действием силы трения, поэтому если скорость стакана меньше скорости платка, то он будет двигаться с постоянным ускорением  $a = \mu g$ . Чтобы он не достиг края стола должно выполняться условие

$$\frac{at^2}{2} = \frac{\mu gl^2}{2v_0^2} < x, \quad (1)$$

из которого следует

$$v_0 > \sqrt{\frac{\mu gl^2}{2x}}. \quad (2)$$

Кроме того, стакан за время движения не должен достичь скорости платка - в противном случае он будет двигаться с постоянной скоростью и упадет со стола. Обозначим  $t_1$  - время, за

которое стакан достигнет скорости платка. Это время легко определить из закона равноускоренного движения стакана

$$at_1 = \mu g t_1 = v_0; \Rightarrow t_1 = \frac{v_0}{\mu g}. \quad (3)$$

За это время стакан должен успеть соскочить с платка, что произойдет, если разность смещений платка и стакана будет меньше длины части платка за стаканом

$$v_0 t_1 - \frac{\mu g t_1^2}{2} < l - x. \quad (4)$$

Из соотношений (3)-(4) находим еще одно условие, налагаемое на скорость платка:

$$v_0 > \sqrt{2\mu g(l-x)}. \quad (5)$$

Так как одновременно должны выполняться неравенства (2) и (5), следует выбрать большую из скоростей, задаваемых этими неравенствами. Определим при каких значениях  $x$  следует выбрать неравенство (2), для чего рассмотрим неравенство

$$\sqrt{\frac{\mu g l^2}{2x}} > \sqrt{2\mu g(l-x)}.$$

Путем очевидной цепочки преобразований эта неравенство приводится к виду

$$l^2 - 4lx + 4x^2 = (l - 2x)^2 \geq 0.$$

Из которого следует, что при выполнении неравенства (2) будет выполняться и неравенство (4). Таким образом окончательный ответ задачи: скорость платка должна удовлетворять неравенству (2).

11.2 Давление газа, находящегося между жидкостью и поршнем, пропорционально массе последнего  $P = \frac{mg}{S}$ , где  $S$  - площадь поперечного сечения сосуда. По закону Генри, количество углекислого газа, растворенного в воде, пропорционально этому давлению  $v_s = \alpha VP$  (где  $V$  - объем жидкости в сосуде), следовательно, количество газа между поршнем и жидкостью зависит от давления по закону  $v = v_0 - \alpha VP$ , где  $v_0$  - общее количество углекислого газа в сосуде. Записывая уравнение Менделеева-Клапейрона для газа в свободном состоянии

$$\frac{mg}{S} hS = \left( v_0 - \alpha V \frac{mg}{S} \right) RT, \quad (1)$$

видим, что масса поршня и высота столба газа связаны соотношением

$$mh = a - bm, \quad (2)$$

где  $a, b$  - некоторые постоянные величины, которые легко выразить через заданные в условии данные

$$\begin{cases} m_0 h_0 = a - b m_0 \\ m_1 h_1 = a - b m_1 \end{cases}; \Rightarrow a = \frac{m_1 m_0}{m_1 - m_0} (h_0 - h_1); \quad b = \frac{m_0 h_0 - m_1 h_1}{m_1 - m_0}.$$

Поршень достигнет жидкости (весь газ растворится в воде), при массе поршня

$$m = \frac{a}{b} = \frac{m_1 m_0 (h_0 - h_1)}{m_0 h_0 - m_1 h_1}. \quad (3)$$

3. Представим сигнал в виде суммы трех гармонических составляющих

$$\begin{aligned} E &= E_0 \cos \omega_0 t (1 + a \cos \omega_1 t) = \\ &= E_0 \cos \omega_0 t + \frac{a E_0}{2} \cos(\omega_0 - \omega_1) t + \frac{a E_0}{2} \cos(\omega_0 + \omega_1) t. \end{aligned} \quad (1)$$

Распространение монохроматической волны в пространстве вдоль оси  $x$  описывается функцией

$$E(t, x) = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right) = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right), \quad (2)$$

где  $c$  - скорость распространения волны с частотой  $\omega$ . Применим эту формулу к сигналу (1), учитывая формулу для скорости распространения волн

$$\begin{aligned} E(t, x) &= E_0 \cos\left(\omega_0 t - \frac{\omega_0}{c_0} x\right) \omega_0 t + \\ &+ \frac{a E_0}{2} \cos\left((\omega_0 - \omega_1) t - \frac{(\omega_0 - \omega_1) x}{c_0 + \gamma \omega_1}\right) + \frac{a E_0}{2} \cos\left((\omega_0 + \omega_1) t - \frac{(\omega_0 + \omega_1) x}{c_0 - \gamma \omega_1}\right) \end{aligned}$$

Далее упростим это выражение, используя малость величин  $\frac{\omega_1}{\omega_0}, \frac{\gamma \omega_1}{c_0} \ll 1$ . Тогда

$$\frac{(\omega_0 - \omega_1) x}{c_0 + \gamma \omega_1} = \frac{x \omega_0}{c_0} \cdot \frac{1 - \frac{\omega_1}{\omega_0}}{1 + \gamma \frac{\omega_1}{c_0}} \approx \frac{x \omega_0}{c_0} \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_0} - \gamma \frac{\omega_1}{c_0}\right);$$

$$\frac{(\omega_0 + \omega_1) x}{c_0 - \gamma \omega_1} \approx \frac{x \omega_0}{c_0} \left(1 + \frac{\omega_1}{\omega_0} + \gamma \frac{\omega_1}{c_0}\right);$$

Воспользуемся теперь обратным преобразованием от суммы косинусов к их произведению

$$E(t, x) = E_0 \cos\left(\omega_0 t - \frac{\omega_0}{c_0} x\right) \left(1 + a \cos\left(\omega_1 t - \frac{\omega_0}{c_0} x \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} + \gamma \frac{\omega_1}{c_0}\right)\right)\right).$$

Скорость распространения сигнала можно найти из условия постоянства фазы (полагая ее равной, например, нулю). Окончательно получаем, что искомая скорость распространения огибающей (полезного сигнала)

$$c = \frac{x}{t} = \frac{\omega_1}{\frac{\omega_0}{c_0} \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} + \gamma \frac{\omega_1}{c_0}\right)} = \frac{c_0}{1 + \gamma \frac{\omega_0}{c_0}} \approx c_0 \left(1 - \gamma \frac{\omega_0}{c_0}\right).$$

11.4 Тема этой задачи предложена студентом 1 курса физического факультета БГУ Юрием Дежко.

4.1. Записывая уравнение динамики для движения электрона (все обозначения стандартные)

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1)$$

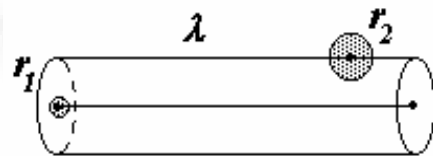
и правило квантования  $mrv = n\hbar$ , находим радиусы боровских орбит

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} n^2 = r_1 n^2. \quad (2)$$

где  $r_1 \approx 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ м}$  - радиус первой боровской орбиты. В первом возбужденном состоянии  $r_2 \approx 2,1 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ , для  $n = 1000$   $r \approx 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ , то есть порядка  $0,05 \text{ мм}$ .

4.2 Оценку длины свободного пробега  $\Lambda$  можно получить путем следующих рассуждений: в цилиндре длиной  $\Lambda$  и радиусом  $(r_1 + r_0)$  (где  $r_1, r_0$  - радиусы атомов водорода и гелия), в среднем должен находиться один атом гелия, поэтому

$$\pi(r_1 + r_0)^2 \Lambda \gamma = 1,$$



где  $\gamma$  - концентрация атомов гелия. Из этого соотношения находим

$$\Lambda \approx \frac{1}{\pi(r_1 + r_0)^2 \gamma}. \quad (3)$$

Концентрацию молекул гелия найдем из уравнения состояния идеального газа

$$p = \gamma k T,$$

$k$  - постоянная Больцмана. Таким образом, получаем окончательную формулу для оценки длины свободного пробега

$$\Lambda \approx \frac{kT}{\pi(r_1 + r_0)^2 p}. \quad (4)$$

Численная оценка длины свободного пробега для атома водорода в заданных условиях  $\Lambda \approx 2 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ . При переходе в первое возбужденное состояние ( $n = 2$ ) радиус атома водорода возрастает в 4 раза поэтому длина свободного пробега уменьшается в  $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} = \frac{(4r_1 + r_0)^2}{(r_1 + r_0)^2} \approx 4$  раза.

4.3 Частота излучения определяется разностью энергий состояний, между которыми происходит переход

$$\nu = \frac{E_1 - E_2}{h}, \quad (5)$$

где  $h$  - постоянная Планка. Энергии состояний могут быть вычислены по формуле

$$E_n = \frac{mv_n^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{me^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad (6)$$

которая следует из теории Бора. Таким образом, искомая частота излучения

$$\nu_0 = \nu_{1 \rightarrow 2} = \frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 4\pi\hbar^3} \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) \approx 2,4 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}.$$

4.4 При движении приемника навстречу волне, одна длина волны  $\lambda$  (которая связана с частотой соотношением  $\lambda = \frac{c}{\nu_0}$ ) пройдет через

приемник за время  $\tau = \frac{\lambda}{c + V}$ . Понятно, что это время является периодом колебаний, воспринимаемым источником, поэтому воспринимаемая частота может быть рассчитана по формуле

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{\nu_0}{c} (c + V) = \nu_0 \left( 1 + \frac{V}{c} \right). \quad (7)$$

4.5 Из формулы (7) следует, что доплеровский сдвиг частоты равен  $\Delta\nu = \nu_0 \frac{V}{c}$ . Такой сдвиг достигается при скорости

$$V^* = c \frac{\Delta\nu}{\nu_0} \approx 1,3 \cdot 10^3 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

4.6 Ширине линии поглощения  $\delta\nu$  соответствует интервал скоростей



$\delta V = c \frac{\Delta v}{v_0} \approx 50 \frac{M}{c}$ . Из приведенного графика найдем значение

функции распределения для скорости  $V^* = 1,3 \cdot 10^3 \frac{M}{c}$  :

$f \approx 0,18 \cdot 10^{-3} \left(\frac{M}{c}\right)^{-1}$ . Поэтому доля молекул, которые могут

поглотить падающее излучение равна  $f\delta V \approx 0,009$  (т.е. около 1%), учитывая вероятность поглощения, найдем долю возбужденных молекул  $\xi = \eta f(V^*)\delta V \approx 9 \cdot 10^{-5}$

4.7 При оговоренных приближениях, следует считать, что возбужденные атомы сразу останавливаются. Выделим эту группу атомов (они имеют скорости мало отличающиеся от величины  $V^* = c \frac{\Delta v}{v_0} \approx 1,3 \cdot 10^3 \frac{M}{c}$ ), обозначим их число  $\delta N = \xi N$ . Средняя

скорость остальных молекул (их число  $N - \delta N$  практически равно полному числу молекул) и будет равна скорости дрейфа  $V_{dp}$ . При отсутствии возбуждения средняя скорость смещения равна нулю, поэтому выполняется соотношение

$$NV_{dp} + \delta NV^* = 0.$$

Отсюда находим среднюю скорость дрейфа  $V_{dp} = -\frac{\delta N}{N}V^* = -\xi V^* \approx -0,1 \frac{M}{c}$ . Знак минус указывает, что дрейф направлен в сторону, противоположную скорости атомов, поглощающих свет.

4.8 Из предыдущих разделов следует, что сорость определяется формулой

$$V_{dp} = -\eta f(V^*)\delta V \cdot V^*,$$

где  $V^* = c \frac{\Delta v}{v_0}$  - скорость атомов, для которых падающее излучение

является резонансным, поэтому

$$V_{dp} \approx -\eta \delta V c \frac{\Delta v}{v_0} f\left(c \frac{\Delta v}{v_0}\right).$$

Положительным считается направление, противоположное направлению падающего света. Схематический график этой зависимости имеет вид  $-xf(x)$  и показан на рисунке.

