

Условие

4. Боковая поверхность длинного цилиндра радиуса R равномерно заряжена с поверхностной плотностью заряда σ . Внутри цилиндра расположено непроводящее кольцо радиуса a , массы m , несущее заряд q . Ось кольца совпадает с осью цилиндра. Кольцо может свободно вращаться вокруг собственной оси, независимо от цилиндра. Цилиндр раскручивают до угловой скорости ω_0 . Чему при этом станет

равной угловая скорость вращения кольца? В каком направлении оно будет вращаться?

Решение

10.4 Вращение заряженного цилиндра эквивалентно существованию кругового электрического тока. Как известно, индукция магнитного поля внутри соленоида рассчитывается по формуле

$$B = \mu_0 n I, \quad (1)$$

где n - плотность намотки, I - сила тока через обмотку. Произведение nI можно рассматривать как поверхностную плотность тока - заряд, протекающий в единицу времени через единицу длины боковой поверхности цилиндра. При вращении равномерно заряженного цилиндра поверхностная плотность тока может быть представлена в виде $\sigma v = \sigma R \omega$, где ω - угловая скорость вращения цилиндра.

Следовательно, в соответствии с формулой (1) индукция магнитного поля внутри вращающегося заряженного цилиндра определяется выражением

$$B = \mu_0 \sigma R \omega \quad (2)$$

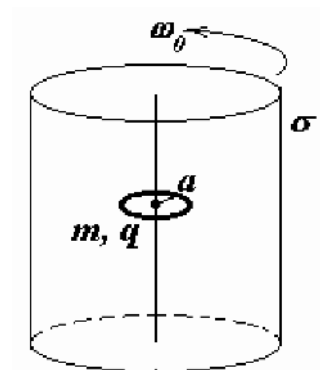
При изменении скорости вращения (что неизбежно во время раскручивания) изменяется величина индукции поля, что в следствие явления электромагнитной индукции приводит к возникновению вихревого электрического поля. По закону Фарадея скорость изменения магнитного потока равна ЭДС индукции возникающего в контуре. Принимая во внимание осевую симметрию задачи и считая магнитное поле однородным, этот закон можно выразить в виде уравнения

$$2\pi r E = -\pi r^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} = -\pi r^2 \mu_0 \sigma R \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \quad (3)$$

из которого следует выражение для напряженности вихревого электрического поля

$$E = -\pi r^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} = -\frac{r \mu_0 \sigma R}{2} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \quad (4)$$

Это поле действует на заряд кольца, приводя к появлению момента сил, раскручивающего кольцо. Корректное рассмотрение сил, действующих на отдельные малые элементы кольца, приводит к следующему выражению для изменения его угловой скорости



$$mr \frac{\Delta\omega_1}{\Delta t} = qE \quad (5)$$

Подставим выражение для напряженности вихревого поля (4) в уравнение (5), получим

$$\frac{\Delta\omega_1}{\Delta t} = -\frac{\mu_0\sigma Rq}{2m} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (6)$$

Как следует из этого уравнения угловые ускорения цилиндра и кольца пропорциональны, следовательно (с учетом нулевых начальных условий), пропорциональны и угловые скорости вращения цилиндра и кольца, то есть

$$\omega_1 = -\frac{\mu_0\sigma Rq}{2m} \omega_0 \quad (7)$$

Знак минус в полученном выражении указывает, что при одноименных зарядах кольца и цилиндра, кольцо будет вращаться в сторону, противоположную вращению цилиндра, в полном соответствии с правилом Ленца.