

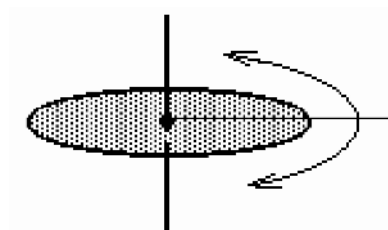
Условие

1. Жесткий диск, закрепленный горизонтально на вертикальной оси, совершает крутильные гармонические колебания некоторой амплитуды вокруг этой оси. Какова амплитуда этих колебаний, если известно, что полные ускорения произвольной точки диска при максимальном отклонении и при прохождении положения равновесия равны по модулю?

Решение

10.1 Крутильные колебания диска описываются функцией

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega t, \quad (1)$$



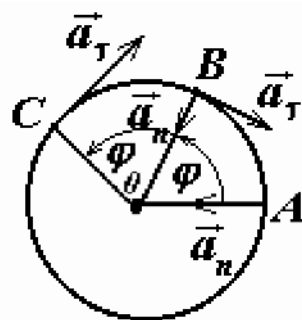
где φ - угол отклонения от положения равновесия, φ_0 - угловая амплитуда колебаний, ω - круговая частота колебаний. Рассмотрим движение произвольной точки диска, находящейся на расстоянии R от оси вращения. В произвольном положении ее ускорение складывается из двух составляющих: тангенциальной $\vec{a}_\tau$ - направленной по касательной к траектории и связанной с изменением модуля скорости движения; нормальной $\vec{a}_n$ - направленной к центру вращения и связанной с изменением направления вектора скорости, которая в данном случае является центростремительным ускорением. Из закона движения (1) следует, что угловая скорость вращения изменяется по закону $\Omega = -\omega\varphi_0 \sin \omega t$, а угловое ускорение

$$\beta = -\omega^2 \varphi_0 \cos \omega t.$$

В положениях максимального отклонения скорости рассматриваемой точки равны нулю, поэтому равно нулю и нормальное ускорение. Следовательно, в этих положениях полное ускорение совпадает с тангенциальным

$$a_1 = a_\tau = R\beta = -R\omega^2 \varphi_0. \quad (2)$$

При прохождении положения равновесия скорость точки максимальна, поэтому тангенциальное ускорение равно нулю, а полное ускорение равно нормальному



$$a_2 = a_n = R\Omega^2 = R\omega^2\varphi_0^2. \quad (3)$$

Приравнивая модули ускорений a_1, a_2 находим, что требуемое условие будет выполняться для произвольной точки диска при единичной угловой амплитуде колебаний $\varphi_0 = 1\text{рад} \approx 57^\circ$.