

Условие

2. (12 баллов). В большую кастрюлю налили $V_0 = 2,0$ л холодной воды при температуре $t_0 = 15^\circ\text{C}$ и поставили на включенную электроплиту. За время $\tau_0 = 5,0$ мин температура воды достигла $t_1 = 45^\circ\text{C}$. После этого в кастрюлю стали медленно доливать холодную воду (при температуре $t_0 = 15^\circ\text{C}$) с постоянной скоростью $\nu = 100 \frac{\text{см}^3}{\text{мин}}$, постоянно ее перемешивая в кастрюле. Постройте примерный график зависимости температуры воды в кастрюле от времени. При какой скорости наливания холодной воды ν_1 температура воды будет оставаться постоянной во время наливания? Потерями теплоты и теплоемкостью кастрюли пренебречь.

Решение

9.2. Найдем тепловую мощность P плиты из уравнения теплового баланса

$$P\tau_0 = c\rho V_0(t_1 - t_0), \quad (1)$$

$$P = \frac{c\rho V_0(t_1 - t_0)}{\tau_0}, \quad (2)$$

где ρ и c - плотность и удельная теплоемкость воды, соответственно. На этом этапе нагревания температура будет возрастать прямо пропорционально времени. Через время τ после начала подливания, в кастрюле будет находиться

$$V = V_0 + \nu\tau \quad (3)$$

литров воды. Всего за время нагревания вода получит от нагревателя количество теплоты, которое определяется формулой

$$Q = P(\tau_0 + \tau). \quad (4)$$

Уравнение теплового баланса (за все время нагревания) будет иметь вид

$$P(\tau_0 + \tau) = c\rho(V_0 + \nu\tau)(t - t_0), \quad (5)$$

где t - температура воды в момент времени τ . Подставляя выражение (2) для мощности нагревателя, получаем искомую функцию зависимости температуры от времени

$$t = t_0 + (t_1 - t_0) \frac{\left(1 + \frac{\tau}{\tau_0}\right)}{\left(1 + \frac{\nu\tau}{V_0}\right)}. \quad (6)$$

Эта функция является монотонной, стремящейся к предельному значению (при $\tau \gg \tau_0$)

$$t^* = t_0 + (t_1 - t_0) \frac{V_0}{\nu \tau_0}, \quad (7)$$

которое при заданных численных значениях параметров равно $t^* = 135^\circ$. Это значение превышает температуру кипения, поэтому

увеличение температуры прекратится при достижении температуры кипения $t_{\text{кип}} = 100^\circ$. Можно найти момент времени, когда начнется кипение, для этого в уравнении (6) необходимо

положить $t = t_{\text{кип}} = 100^\circ$ и найти соответствующее значение времени $\tau \approx 28$ мин.

График полученной зависимости показан на рисунке. Значение скорости наливания ν_1 , при котором температура воды в кастрюле будет оставаться постоянной можно найти из формулы (6), в котором второе слагаемое должно не зависеть от времени τ . Это возможно, только при $\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{\nu \tau}{V_0}$. То есть, при $\nu = \frac{V_0}{\tau_0} = 0,4 \frac{\text{л}}{\text{мин}}$.

Заметим, что это же значение можно получить из уравнения теплового баланса $c\rho\nu_1(t_1 - t_0) = P$.

