

Условие

1. (13 баллов). Небольшие упругие шарики в произвольные моменты времени бросают с высоты $h = 1,0$ м на массивную горизонтальную платформу, которая колеблется в вертикальном направлении по гармоническому закону с амплитудой $a = 1,0$ см и частотой $\nu = 50$ Гц. Удары шариков о платформу абсолютно упругие, сопротивлением воздуха можно пренебречь. Определите, какая доля шариков после удара подпрыгнет выше первоначального уровня. С какой частотой ν_1 должна колебаться платформа (при той же амплитуде), чтобы 99% шариков подпрыгнуло выше первоначального уровня?

Решение

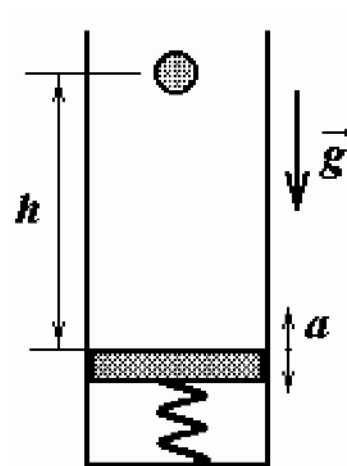
11.1 Понятно, что после удара шарик подпрыгнет выше первоначального уровня, если после удара модуль его скорости станет больше. В свою очередь это произойдет в том случае, когда в момент удара платформа движется вверх, навстречу шарiku. Так как время бросания произвольно, то, казалось бы, момент попадания шарика на платформу так же произволен, поэтому приблизительно половина шариков получит приращение скорости, а вторая половина свою скорость уменьшит. Однако рассмотрим повнимательнее кинематические законы движения шариков и платформы. Пусть закон движения платформы описывается функцией

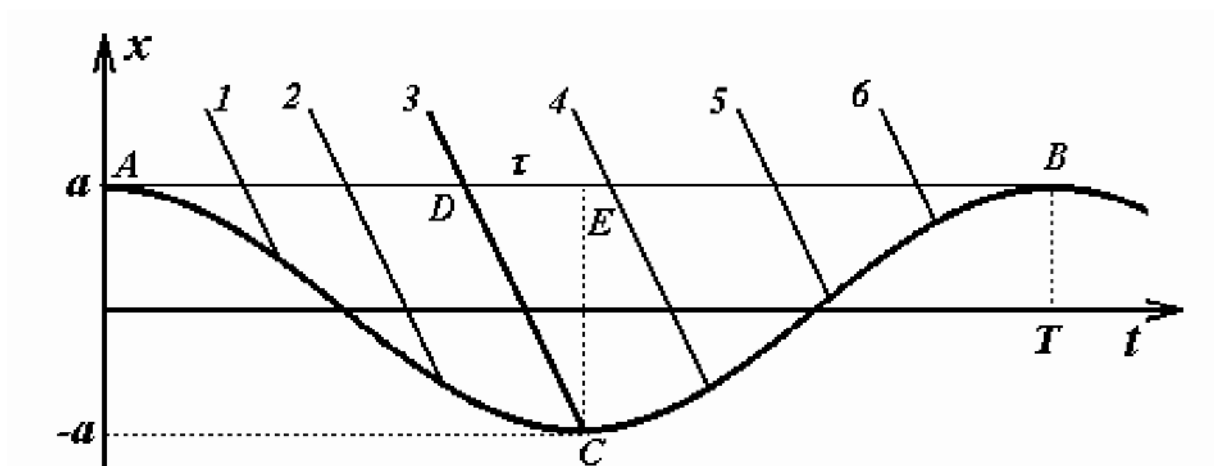
$$x_0 = a \cos \omega t. \quad (1)$$

Так как амплитуда колебаний в сто раз меньше высоты падения шарика, можно пренебречь изменением скорости шарика, когда он движется в пределах амплитуды колебания, поэтому его закон движения можно описать линейной функцией

$$x = b - v_0 t, \quad (2)$$

где $v_0 = \sqrt{2gh}$ - скорость движения шарика, b - некоторая константа, зависящая от момента бросания шарика (ее следует считать некоторой случайной величиной). Ясно, что для решения задачи достаточно рассмотреть один период колебания платформы.





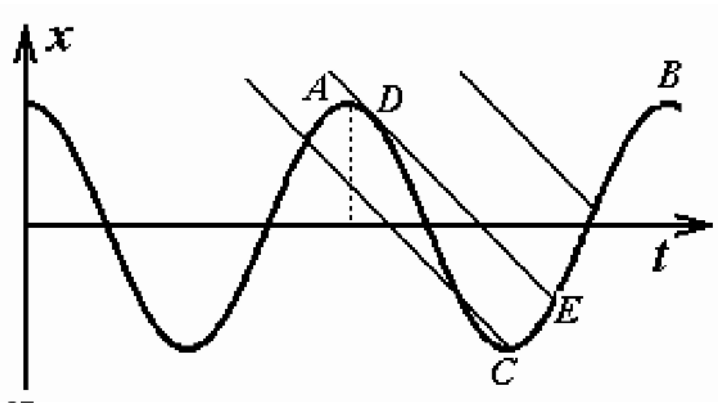
На рисунке изображены графики законов движения платформы (синусоида) и некоторых шариков (наклонные прямые линии). Из-за случайности времени бросания шарик будет достигать верхнего уровня колебаний платформы в произвольные случайные моменты времени. Иными словами, график закона движения шарика пересекает прямую AB в произвольный момент времени. Однако, как хорошо видно на рисунке, моменты столкновений (пересечений с синусоидой) распределяются не равномерно. Так столкновение с движущейся вверх платформой произойдет в том случае, когда линия закона движения шарика пересечет AB на участке DB , который больше отрезка AD (в этом случае произойдет пересечение со спадающей ветвью синусоиды). «Критической» является прямая пересекающая синусоиду в нижней точке. Таким образом, доля шариков, которые увеличат свою скорость в результате столкновения, равна отношению длин отрезков DB и AB . Последний из них равен периоду колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$. Также легко определить из закона движения величину отрезка DE :

$$\tau = \frac{2a}{v_0}. \quad (3)$$

Окончательно, доля шариков, которые подпрыгнут выше исходного уровня, определяется формулой

$$\eta = \frac{\tau + \frac{T}{2}}{T} = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{T} = \frac{1}{2} + \frac{2a\nu}{\sqrt{2gh}} \approx 0,73. \quad (4)$$

При увеличении частоты колебаний методика расчета может претерпеть существенные изменения.



Так график закона движения шарика может пересечь синусоиду в нескольких точках (см. рис.). Видно, что на синусоиде появляется «мертвая зона» - участок DCE , в котором не может вообще произойти столкновения - шарик не может догнать платформу. Шарик уменьшит свою скорость, если пересечение с синусоидой произойдет на малом участке AD , где D точка касания прямой закона движения шарика с синусоидой. Рассмотрим этот участок подробнее.

Пусть D точка касания (момент этого касания обозначим t_1). Тогда интервал времени достижения верхнего уровня колебаний платформы, в течение которого столкновение приведет к уменьшению скорости, изобразится отрезком AB (длину этого участка обозначим τ). В этом случае доля шариков, увеличивших скорость, рассчитывается по формуле

$$\eta = \frac{T - \tau}{T}, \quad (5)$$

из которой следует, что величина интервала AB должна быть равна

$$\tau = (1 - \eta)T = (1 - \eta)\frac{2\pi}{\omega}. \quad (6)$$

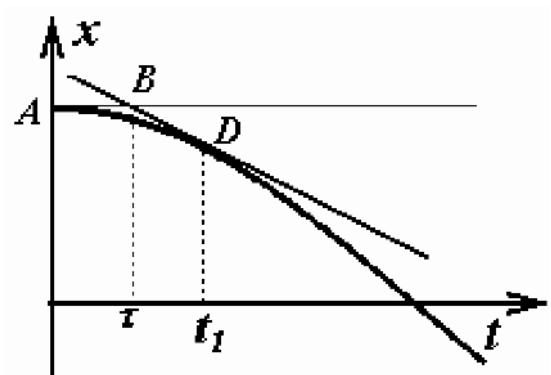
Закон движения шарика (2), при котором он достигает точки $x = a$ в момент времени τ , имеет вид

$$x = a - v_0(t - \tau). \quad (7)$$

Чтобы в момент времени t_1 произошло касание (как шарика с платформой, так и графиков их законов движения) необходимо, чтобы в этой части были равны функции и их производные, то есть

$$\begin{cases} a \cos \omega t_1 = a - v_0(t_1 - \tau), \\ -a \sin \omega t_1 = -v_0 \end{cases} \quad (8)$$

Уравнения (8) являются системой с двумя неизвестными величинами - ω, t_1 , поэтому может быть решена. К сожалению, эта система не может быть решена



«в квадратурах», однако величина τ и, следовательно, t_1 являются малыми, поэтому можно воспользоваться приближенными формулами для тригонометрических функций

$$\sin \omega t_1 \approx \omega t_1, \quad \cos \omega t_1 \approx 1 - \frac{(\omega t_1)^2}{2}. \quad (9)$$

В этом приближении система уравнений (8) легко решается (конечно, с учетом выражения (6)) -

$$\nu = \frac{v_0}{8\pi^2 a(1 - \eta)} \approx 0,56 \cdot 10^3 \text{ Гц}. \quad (10)$$