

Условие

4. Имеется теплоизолированный толстостенный цилиндрический стакан, толщина стенок которого составляет 20% от его внешнего радиуса. Если стакан нагреть до $t_1 = 400^\circ\text{C}$ и полностью заполнить льдом, взятым при температуре плавления $t_0 = 0^\circ\text{C}$, то, в конечном счете, весь лед растает. Во сколько раз нужно изменить толщину стенок стакана (при неизменном внешнем радиусе), чтобы, заполнив его полностью льдом при тех же начальных температурах льда и стакана мы смогли бы закипятить воду? Испарением и тепловыми потерями пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c = 4,19 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 3,36 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$, температура кипения воды $t_2 = 100^\circ\text{C}$.

Решение

9-4. Пренебрегая теплоемкостью дна и тепловыми потерями, запишем уравнение теплового баланса для системы стакан-лед

$$V_1 \rho_1 c_1 t_1 = V_2 \rho \lambda, \quad (1)$$

где $V_1 = \pi(R^2 - (R - h_1)^2)H$ — объем стенок стакана толщиной h_1 , R и H — его внешний радиус и высота, ρ_1 и c_1 — плотность и удельная теплоемкость вещества, из которого изготовлены стенки стакана, $V_2 = \pi(R - h_1)^2 H$ — объем льда, ρ — его плотность. Во втором случае (таяние льда и нагрев воды до температуры кипения) в стакане со стенками толщиной h_2 уравнение теплового баланса имеет вид

$$\pi(R^2 - (R - h_2)^2)H \rho_1 c_1 (t_1 - t_2) = \pi(R - h_2)^2 H \rho (\lambda + ct_2). \quad (2)$$

Разделим почленно уравнение (1) на (2)

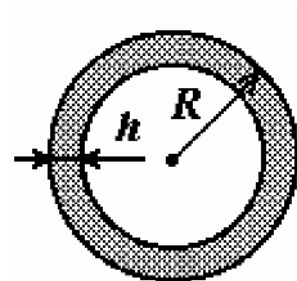
$$\frac{R^2 - (R - h_1)^2}{R^2 - (R - h_2)^2} \cdot \frac{t_1}{t_1 - t_2} = \frac{(R - h_1)^2}{(R - h_2)^2} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + ct_2}. \quad (3)$$

Теперь учтем, что $h_1 = \eta_1 R = 0,2R$ и $h_2 = \eta_2 R$. Подстановка этих соотношений в выражение (3) приводит к квадратному уравнению относительно неизвестной величины η_2

$$\frac{1 - (1 - \eta_1)^2}{1 - (1 - \eta_2)^2} \cdot \frac{t_1}{t_1 - t_2} = \frac{(1 - \eta_1)^2}{(1 - \eta_2)^2} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + ct_2}. \quad (4)$$

Решать это уравнение в общем виде весьма затруднительно, поэтому подставим в (4) все известные численные данные и придем в итоге к уравнению

$$\eta_2^2 - 2\eta_2 + 0,628 = 0,$$



корнями которого являются числа $\eta_2 = 1,61; 0,39$. Выбираем второй корень, поскольку первый явно не подходит (обратите внимание, что он дает такую же по модулю разность в скобках в уравнении (4) как и первый корень). Тогда изменение толщины стенок равно

$$\frac{0,39}{0,20} = 1,95 \approx 2.$$

Увеличить толщину стенок стакана придется примерно в два раза.

Отметим, что мы могли насыпать в стакан колотый лед или рыхлый снег, главное чтобы их плотность в обоих опытах была неизменна.