

Условие

1. Автобус проехал первую треть пути со скоростью $v_1 = 50$ км/час, а вторую - со скоростью $v_2 = 60$ км/час. С какой скоростью ему нужно проехать оставшуюся часть пути, чтобы средняя скорость движения автобуса на всем маршруте была: а) $v_{\text{ср}}^a = 70$ км/час; б) $v_{\text{ср}}^b = 90$ км/час?

Решение

9-1. По определению средней скорости

$$v_{\text{ср}} = S/t, \quad (1)$$

где S - длина всего маршрута, t - время его прохождения. Обозначим скорость автобуса на последней трети пути через v_3 . Тогда

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{S/3}{v_1} + \frac{S/3}{v_2} + \frac{S/3}{v_3}. \quad (2)$$

Подставляя выражение (2) в формулу (1), получаем

$$v_{\text{ср}} = \frac{S}{\frac{S/3}{v_1} + \frac{S/3}{v_2} + \frac{S/3}{v_3}}. \quad (3)$$

Отсюда можно выразить искомую скорость

$$v_{\text{ср}} = \frac{v_{\text{ср}} v_1 v_2}{3v_1 v_2 - v_{\text{ср}}(v_1 + v_2)}. \quad (4)$$

Подставив в выражение (4) $v_{\text{ср}}^a = 70$ км/ч, получим ответ для первого пункта задачи

$$v_3^a = \frac{70 \cdot 50 \cdot 70}{3 \cdot 50 \cdot 70 - 70 \cdot (50 + 70)} \approx 117 \text{ (км/ч)}$$

Полученное значение для скорости движения автобуса достаточно большое и, конечно же, противоречит правилам дорожного движения, поэтому реальному водителю лучше не гнаться за указанным средним. Подставляя в формулу (4) $v_{\text{ср}}^b = 90$ км/ч, мы обнаруживаем, что

$$v_{\text{ср}}^b = \frac{90 \cdot 50 \cdot 70}{3 \cdot 50 \cdot 70 - 90(50 + 70)} = -1050 \text{ км/ч} < 0.$$

Результат явно противоречит здравому смыслу, так как автобус должен двигаться только вперед. Проанализируем выражение (4). Знаменатель обращается в ноль при

$$v_{\text{ср}}^* = \frac{3v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 87,5 \text{ км/ч}$$

При этом $v_3 \rightarrow \infty$, т.е. это предельное значение средней скорости автобуса на всем маршруте, возможное при данных условиях движения. Даже мчась на последнем участке “со скоростью света”, водитель не сможет превысить значение $v_{\text{ср}}^*$. Таким образом, мы показали, что скорости движения автобуса на первых двух участках маршрута ограничивают максимальное значение его средней

скорости на всем пути. Поскольку $v_{\text{ср}}^b > v_{\text{ср}}^*$, то заданное в условии значение средней скорости не может быть достигнуто ни при каких значениях v_3 . Этот результат полезно знать водителям-лихачам – кратковременные рывки с большой скоростью не помогут достичь высокой средней скорости, если в пути будут хотя бы кратковременные остановки. Лучше двигаться с меньшей скоростью, но без остановок (кстати, при этом не придется обгонять дважды одни и те же машины).