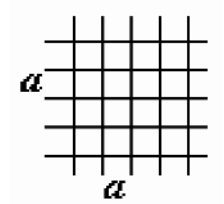


## Условие

4. В качестве модели упругой пленки можно рассмотреть квадратную сетку, образованную очень маленькими пружинками с жесткостью  $k$ . Покажите, что в рамках данной модели потенциальная энергия однородно растянутой пленки определяется формулой  $U = k(\sqrt{S} - \sqrt{S_0})^2$ , где  $S$  - площадь растянутой пленки,  $S_0$  - ее площадь в недеформированном состоянии. Из пленки изготовили воздушный шарик, радиус которого при недеформированной пленке равен  $r_0$ . Найдите зависимость давления воздуха внутри шарика от его радиуса. Атмосферным давлением пренебречь.

## Решение

10.4 В рамках указанной модели представим пленку как квадратную сетку, состоящую из маленьких пружинки длиной  $a$ . Пусть кусок пленки имеет форму квадрата со стороной  $l_0$  ( $l_0 \gg a$ ). Тогда этот кусок имеет  $N = 2\frac{l_0^2}{a^2}$  пружинки (площадь одной ячейки равна  $a^2$ , а на каждую ячейку приходится 2 пружинки - каждая пружинка «принадлежит двум соседним ячейкам!»). Если растянуть пленку до квадрата со стороной  $l$ , то длина каждой пружинки увеличится на величину  $\Delta x = \frac{l}{l_0}a - a = \frac{a}{l_0}(l - l_0)$ . Поэтому увеличение потенциальной энергии пленки будет определяться формулой



$$U = N \frac{k(\Delta x)^2}{2} = k(l - l_0)^2 = k(\sqrt{S} - \sqrt{S_0})^2, \quad (1)$$

где  $S = l^2$  - площадь растянутой пленки,  $S_0 = l_0^2$  - площадь недеформированной пленки.

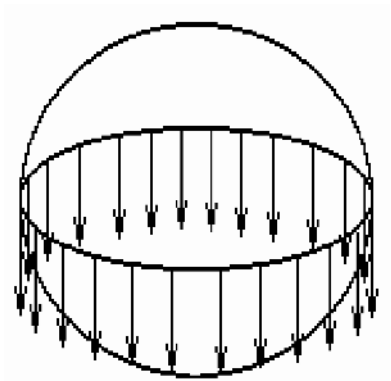
Рассмотрим шарик, изготовленный из эластичной пленки. Пусть при недеформированной пленке радиус шарика равен  $r_0$ . Тогда на длину

«экватора» приходится  $n = \frac{2\pi r_0}{a}$  упругих пружинки, натяжения которых будут уравновешивать силы давления воздуха. При радиусе шарика  $r$  суммарная сила давления воздуха на полусферу

$$F = P\pi r^2 \quad (2)$$

будет уравновешена силами упругости

$$nk\Delta x = \frac{2\pi r_0}{a}k \left( \frac{r}{r_0}a - a \right) = 2\pi k(r - r_0), \quad (3)$$



где учтено, что удлинение каждой пружинки может быть найдено из подобия  $\Delta x = \frac{r}{r_0}a - a$ . Приравнявая эти силы, находим равновесное значение давления газа

$$P = 2k \frac{r - r_0}{r^2}. \quad (4)$$

Возможен и другой подход к вычислению давления. При увеличении радиуса шара на малую величину  $\Delta r$ , газ совершит работу

$$A = P\Delta V = P4\pi r^2\Delta r. \quad (5)$$

Эта работа пойдет на увеличение потенциальной энергии пленки  $\Delta U = U(r + \Delta r) - U(r)$ . Воспользуемся формулой (1) для вычисления этой величины

$$\Delta U = k \cdot 4\pi \cdot 2(r - r_0)\Delta r, \quad (6)$$

при выводе которой учтено, что площадь поверхности сферы  $S = 4\pi r^2$ . Приравняв выражения (5) и (6), получаем прежний результат (4).