

Условие

4. Сосуд в форме параллелепипеда, размеры которого указаны на рисунке, снабжен плотно пригнанным подвижным поршнем П. В верхней крышке сосуда слева сделана небольшая щель АВ. Первоначально поршень примыкает к правой стенке сосуда. В сосуд наливают воду так, что высота ее уровня равна h_0 . Какую минимальную работу необходимо совершить, чтобы, медленно передвигая поршень, полностью

вытеснить воздух из сосуда? Атмосферное давление P_0 .

Решение

4. В ходе перемещения поршня на него действуют силы давления воздуха

$$F_1 = P_0 a(a - h) \quad (1)$$

и воды

$$F_2 = \left(\rho g \frac{h}{2} + P_0\right) ah \quad (2)$$

, где ρ -плотность воды, h - изменяющаяся высота уровня воды в сосуде, $\rho g \frac{h}{2}$ - среднее давление воды на поршень. Так как поршень

плотно пригнан, то между ним и правой стенкой сосуда находится вакуум.

Чтобы совершенная работа была минимальна к поршню необходимо прикладывать силу, лишь незначительно превышающую силу давления воды и воздуха:

$$F = F_1 + F_2 = P_0 a^2 + \rho g a \frac{h^2}{2}. \quad (3)$$

Как следует из формулы (3) прикладываемая сила должна изменяться в ходе перемещения поршня, поэтому совершенную ею работу подсчитать сложно (необходимо использовать операцию интегрирования. Однако, первое слагаемое выражении (3) постоянно (поэтому работу этой силы A_1 подсчитать не составляет труда), а работа оставшейся составляющей силы равна изменению потенциальной энергии воды $A_2 = \Delta U$ (найти которое тоже не сложно).

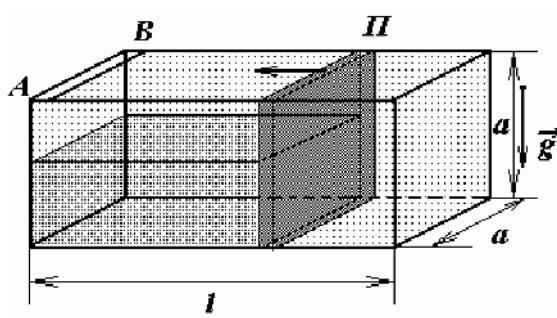
Итак,

$$A_1 = P_0 a^2 x, \quad (4)$$

где x - смещение поршня, которое найдем из условия постоянства объема воды

$$l a h_0 = (l - x) a^2 \Rightarrow x = l \left(1 - \frac{h_0}{a}\right). \quad (5)$$

Следовательно, $A_1 = P_0 a^2 l \left(1 - \frac{h_0}{a}\right)$.



Вычислим изменение потенциальной энергии воды по формуле

$$A_2 = \Delta U = \rho g(l-x)a \frac{a}{2} - \rho g l h_0 \frac{h_0}{2} = \frac{\rho g a l h_0}{2}. \quad (6)$$

Таким образом полная работа вычисляется по формуле

$$A = \frac{\rho g a l h_0}{2} + P_0 a^2 l \left(1 - \frac{h_0}{a}\right)$$

Заметим, что для не очень высоких сосудов ($\rho g a \ll P_0$) второе слагаемое значительно превышает первое, то есть основная работа совершается по преодолению силы атмосферного давления.