

Гомель, 1998 г. (Решения)

9 класс.

9.1. При параллельном соединении резинки и пружины их удлинения Δl одинаковы, а сумма сил упругости резинки F_1 и пружины F_2 равна весу подвешенного груза:

$$F_1 + F_2 = mg. \quad (1)$$

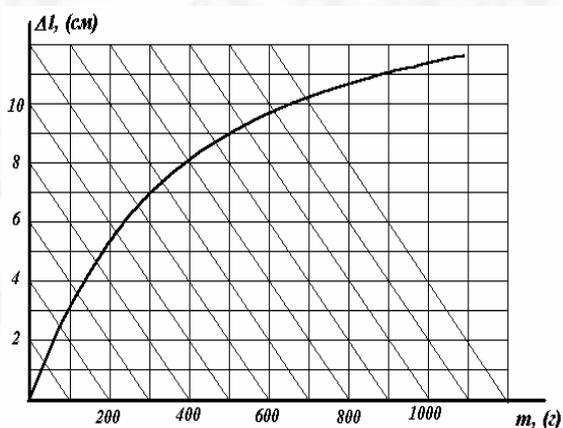
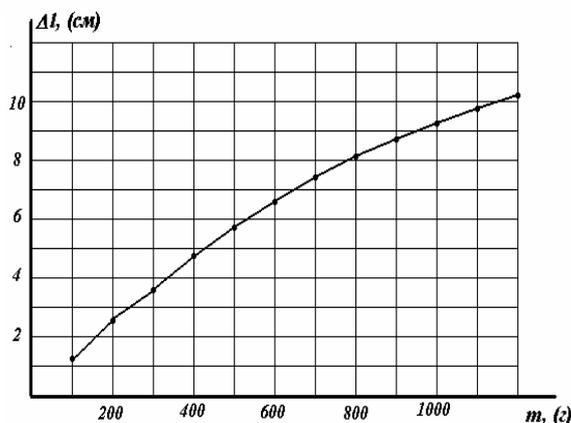
Учитывая, что деформация пружины подчиняется закону Гука $F_2 = k\Delta l$, запишем выражение для деформации пружины в виде

$$\Delta l = \frac{mg - F_1}{k}. \quad (2)$$

Зависимость деформации резины от приложенной силы $\Delta l(F_1)$ задана в виде графика, поэтому деформация системы может быть найдена как решение системы уравнений (2) и представленной зависимости. Однако, величина деформации резины дана в виде функции от массы подвешенного груза, иными словами $F_1 = m_1g$, где m_1 - масса, которую «удерживает» резина. Поэтому запишем уравнение (2) в виде зависимости от m_1 :

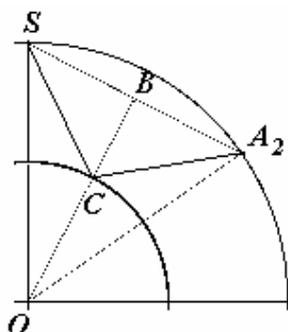
$$\Delta l = \frac{g}{k}(m - m_1). \quad (3)$$

График зависимости Δl от m_1 представляет прямую линию пересекающую ось абсцисс в точке $m_1 = m$ с коэффициентом наклона g/k , а решение системы есть точка пересечения данной прямой с графиком зависимости деформации резины от массы прикрепленного груза.



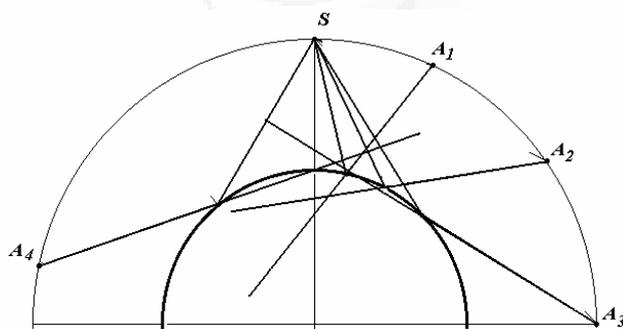
Проведя семейство прямых, подчиняющихся уравнению (3), для различных значений m , получим искомый набор значений деформаций системы «резинка-пружина». График такой зависимости представлен на рисунке.

9.2. Для построения хода лучей необходимо воспользоваться законом отражения света : угол падения равен углу отражения.



Рассмотрим, например построение искомого луча для точки A_2 . Для этого необходимо найти на сфере такую точку C , чтобы угол SCB был равен углу BCA_2 , где BC - продолжение радиуса, проведенного в точку C . Такое построение очевидно - соединим точки A_2 и S , середину отрезка SA_2 (точку B)

соединим с центром сферы, точка пересечения этого отрезка со сферой и будет искомая точка C . Аналогично можно построить и остальные требуемые лучи.



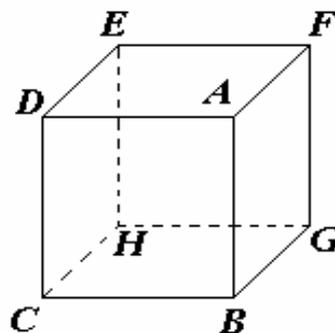
Как видно, действительно, продолжения этих лучей не пересекаются в одной точке. Следовательно, сфера не формирует точечного изображения точечного источника. Тем не менее, это не означает,

что в сфере нельзя увидеть четкого изображения источника. Но изображение, видимое глазом, формируется очень узким пучком лучей, которые пересекаются в очень узкой области, которая и является практически точечным изображением источника.

9.3. По закону Ома сила полного тока, протекающего через куб равна

$$I = \frac{U}{R} = \frac{60V}{10\Omega} = 6,0A.$$

Рассмотрим теперь замкнутый контур $ABGHEDA$, состоящий из шести равноправных ребер (каждое отстоит от точки C на расстоянии одной грани). Силы токов, пересекающих каждое из этих ребер равны, следовательно, сила тока, пересекающего ребро AB , равна $I / 6 = 1,0A$.



9.4. Минимальную работу в данном случае легко подсчитать как изменение потенциальной энергии системы. Объем воды в сосуде

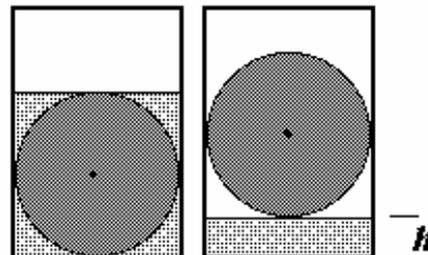
$$V = 4R^2L - \pi R^2L;$$

после того как цилиндр достанут из воды вода заполнит дно сосуда слоем толщиной

$$h = \frac{V}{2RL} = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)R.$$

Следовательно, на такую же высоту необходимо поднять цилиндр. Изменение его потенциальной энергии при этом

$$\Delta U_1 = mgh = \pi R^3 L \rho g \left(2 - \frac{\pi}{2}\right).$$



Потенциальная энергия воды уменьшится на величину

$$\Delta U_2 = (4 - \pi)R^2 L \rho_0 g \left(R - \frac{h}{2}\right) = (4 - \pi)R^3 L \rho_0 g \left(1 + \frac{\pi}{4}\right),$$

при записи этого соотношения учтено, что первоначально центр тяжести воды находился на высоте R , а затем оказался на высоте $\frac{h}{2}$.

Таким образом, полное изменение энергии (следовательно, и необходимая работа) рассчитываются по формуле

$$A = \Delta U = \Delta U_1 - \Delta U_2 = \frac{4 - \pi}{2} R^3 L g \left(\pi \rho - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) \rho_0\right).$$

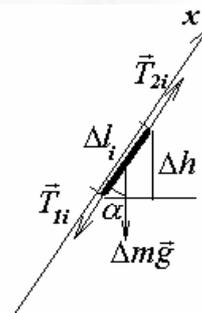
9.5 Рассмотрим силы, действующие на небольшой участок веревки длиной Δl_i - сила тяжести $\Delta m_i \vec{g}$, и натяжения веревки с двух сторон от выделенного участка \vec{T}_{1i} и \vec{T}_{2i} . Запишем уравнение второго закона Ньютона для выделенного кусочка в проекции на направление самого участка (на рисунке обозначена ось x):

$$\Delta m_i a = T_{2i} - T_{1i} - \Delta m_i g \cos \alpha_i,$$

Выразим массу кусочка $\Delta m_i = \frac{m}{L} \Delta l_i$ и подставим в полученное уравнение

$$\frac{m}{L} \Delta l_i a = T_{2i} - T_{1i} - \frac{mg}{L} \Delta l_i \cos \alpha_i,$$

где a - ускорение веревки.



Просуммируем уравнения, относящиеся ко всем участкам веревки. Учтем, что силы натяжения отдельных участков встречаются дважды, причем с различными знаками, поэтому их сумма для всех внутренних участков обратится в нуль, останется только сила натяжения одного из концов веревки (то есть F). Очевидно, что сумма длин Δl_i равна длине веревки L ; величина $\Delta l_i \cos \alpha_i = \Delta h_i$ есть разность высот концов выделенного участка, поэтому сумма этих величин равна h . Таким образом, после суммирования получим

$$ma = F - \frac{h}{L}mg.$$

Откуда находим ускорение

$$a = \frac{F}{m} - \frac{h}{L}g.$$

Данная задача может быть также легко решена с использованием энергетического подхода. Пусть за время Δt веревка сместилась на расстояние Δx , тогда сила F совершила работу $A = F\Delta x$, которая пошла на увеличение кинетической $\Delta E_{кин.} = \Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right) = mv\Delta v$ и потенциальной энергии $\Delta E_{пот.} = m\frac{\Delta x}{L}gh$ веревки.

Таким образом,

$$F\Delta x = mv\Delta v + m\frac{\Delta x}{L}gh.$$

Разделим это уравнение на Δt (с учетом $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v, \frac{\Delta v}{\Delta t} = a$) и сократим на v , получим

$$F = ma + \frac{h}{L}mg,$$

откуда следует ответ задачи.

10.1. Давление газа в трубке определяется атмосферным давлением и гидростатическим давлением столбика ртути

$$P_0 = P_a + \rho gl; \quad (1)$$

а по закону Дальтона равно сумме парциальных давлений водяных паров $P_{нас.}$ и сухого воздуха P_1

$$P_0 = P_1 + P_{нас.}. \quad (2)$$

Так как воды имеется в избытке, то давление водяных паров при любой температуре будет равно давлению насыщенного пара, зависимость которого от температуры представлена в виде графика.

Параметры сухого воздуха подчиняются уравнению состояния, которое мы запишем в виде уравнения Клапейрона:

$$\frac{P_1 h}{T} = \frac{P_0 h_0}{T_0}; \quad (3)$$

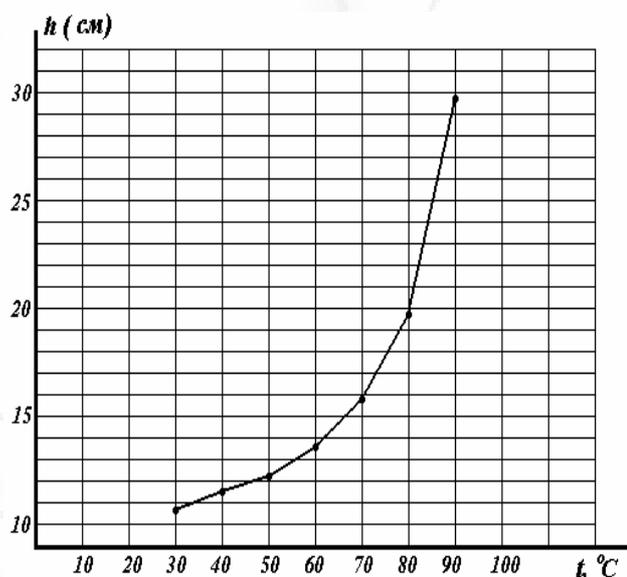
где T_0 - начальная температура ($T_0 = 20 + 273 = 293\text{K}$), при этой температуре можно пренебречь давлением водяного пара и считать, что давление воздуха равно $P_0 = 1,2 \cdot 10^5 \text{ Па}$ (расчет по формуле (1)).

Тогда из формул (3) и (2) следует

$$h = h_0 \frac{T}{T_0} \cdot \frac{P_0}{P_1} = h_0 \frac{T}{T_0} \cdot \frac{P_0}{P_0 - P_{\text{нас}}}. \quad (4)$$

Используя данные, взятые из графика, не представляет труда рассчитать зависимость высоты столба от температуры. Результаты таких расчетов представлены в таблице и на графике.

$t(^{\circ}\text{C})$	$P_{\text{нас.}}$ (10^5 Па)	P_1 (10^5 Па)	$h(\text{см})$
30	0.04	1,16	10,7
40	0.08	1.12	11.4
50	0.11	1.09	12.1
60	0.20	1.00	13.6
70	0.32	0.88	15.9
80	0.47	0.73	19.8
90	0.70	0.50	29.7



10.2. Для решения данной задачи удобно воспользоваться уравнением движения для системы тел: произведение массы системы на ускорение центра масс равно сумме внешних сил, действующих на систему.

В данном случае

$$Ma_c = P - Mg, \quad (1)$$

где M - масса всей системы, P - ее вес, a_c - ускорение центра масс.

Когда вода (а, следовательно и центр масс) неподвижна, то вес системы P_0 равен силе тяжести Mg . Поэтому изменение веса при перекачке воды определяется выражением

$$\Delta P = Ma_c. \quad (2)$$

При перекачке уровни воды в сосудах h_1 и h_2 будут изменяться, конечно, по линейному закону

$$\begin{aligned} h_1 &= h_{10} + \frac{V}{S}t \\ h_2 &= h_{20} - \frac{V}{S}t \end{aligned} \quad (3)$$

но положение центра масс всей системы будет изменяться по закону квадратичному. Действительно, высота центра масс Z_c может быть найдена из уравнения

$$MZ_c = M_0Z_0 + \rho Sh_1(l + \frac{h_1}{2}) + \rho Sh_2 \frac{h_2}{2}, \quad (4)$$

где M_0, Z_0 - масса и высота центра масс установки без воды, l - высота верхнего бака. Подставляя выражения (3), получим

$$\begin{aligned} MZ_c &= M_0Z_0 + \rho Sh_{10} + \frac{1}{2}\rho Sh_{10}^2 + \\ &+ \frac{1}{2}\rho Sh_{20}^2 + \rho V(l + h_{10} + h_{20})t + \rho \frac{V^2}{S}t^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Из выражений (2) и (5) следует

$$\Delta P = Ma_c = 2\rho \frac{V^2}{S}$$

Заметим, что ответ не зависит от того, перекачивают воду вверх или вниз. Может эта задача вам покажется более понятной, если Вы проведете аналогию с двумя грузами, подвешенными на нити, перекинутой через блок. При ускоренном движении грузов вес всей системы также изменяется. Замените грузы тяжелой однородной веревкой и Вы получите простейший механический аналог этой задачи.

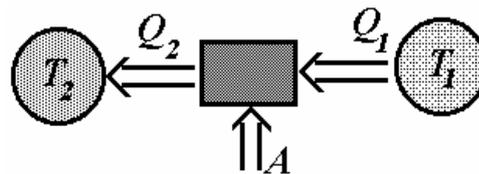
10.3. Для идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно, выполняется соотношение

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}, \quad (1)$$

где Q_1, Q_2 - теплоты отданная нагревателем и полученная холодильником;

T_1, T_2 - температуры нагревателя и холодильника, соответственно. Это же соотношение выполняется и для холодильной машины, работающей по обратному циклу, в котором от холодильника теплоту забирают и передают нагревателю. Мы используем соотношение (1), для того чтобы рассчитать количество теплоты, забранное у холодильника.

Принцип работы холодильной машины представлен на рисунке в виде схемы: из сосуда 1, содержащего воду при температуре T_1 холодильник забирает Q_1



теплоты, при этом внешние силы совершают работу A и количество теплоты $Q_2 = Q_1 + A$ передается сосуду 2, в котором находится вода при температуре T_2 . Так как вода в сосуде 2 находится при температуре кипения, то эта температура изменяться не будет. Вода же в сосуде 1 будет остывать, возможно, затем замерзать. Поэтому необходимо проводить расчеты поэтапно с количественными результатами на каждом этапе.

Первый этап. Остывание воды до температуры замерзания.

Холодильник забирает количество теплоты

$$Q_1' = c_1 m_1 \Delta t_1 = 0,38 \text{ МДж} ,$$

где $\Delta t_1 = 30^\circ \text{C}$ - изменение температуры воды в первом сосуде. В процессе остывания температура изменяется, поэтому строго говоря, для вычисления количества теплоты переданной в сосуд 1, необходимо рассматривать процесс, разбивая его на бесконечно малые участки. Однако, так как относительное изменение абсолютной температуры не велико (порядка 10%), то мы в расчетах примем среднее значение температуры $T_1' = 273 + 15 = 288 \text{K}$. На этом этапе сосуд 2 получит

$$Q_2' = \frac{T_2}{T_1'} Q_1' = 0,49 \text{ МДж}.$$

Этого количества теплоты хватит, чтобы испарить

$$\Delta m_2' = \frac{Q_2'}{r} = 0,22 \text{ кг}$$

воды (вся вода не испарилась - надо греть дальше). Работа, совершенная на первом этапе

$$A' = Q_2' - Q_1' = 0,11 \text{ МДж}.$$

Второй этап. Замерзание воды.

Сосуд 1 отдаст

$$Q_1'' = \lambda m_1 = 1,0 \text{ МДж} ;$$

сосуд 2 получит

$$Q_2'' = \frac{T_2}{T_1''} Q_1'' = 1,37 \text{ МДж} ,$$

(здесь $T_1'' = 273\text{K}$ - температура замерзания воды); при этом испарится

$$\Delta m_2'' = \frac{Q_2''}{r} = 0,61\text{кг},$$

совершена работа

$$A'' = Q_2'' - Q_1'' = 0,37\text{МДж}.$$

Как следует, из полученных расчетов, и после этого этапа не вся вода испарилась, осталось $\Delta m_2''' = m_2 - \Delta m_2' - \Delta m_2'' = 0,17\text{кг}$.

Третий этап. Остывание льда.

На этом этапе нам необходимо решать обратную задачу - легко найти количество теплоты, которое получит кипящая вода $Q_2''' = r\Delta m_2''' = 0,38\text{МДж}$. Требуется определить сколько теплоты отдаст лед. На этом этапе температура T_1 так же изменяется, но мы по прежнему в расчетах используем ее среднее значение

$T_1''' = T_1'' - \frac{\Delta t_2}{2}$, где Δt_2 - изменение температуры льда. Тогда

$Q_1''' = c_2 m_1 \Delta t_2$, а по формуле (1) $Q_1''' = \frac{T_1'''}{T_2} Q_2'''$. Приравнявая эти два

выражения, найдем

$$\Delta t_2 = T_1'' \left(\frac{c_2 m_1 T_2}{Q_2'''} + \frac{1}{2} \right)^{-1} = 41^\circ.$$

Таким образом, в сосуде 1 будет находится лед при температуре -41°C .

На третьем этапе лед отдаст $Q_1''' = c_2 m_1 \Delta t_2 = 0,26\text{МДж}$ теплоты, следовательно совершена работа

$$A''' = Q_2''' - Q_1''' = 0,12\text{МДж}.$$

Итого, в процессе испарения воды будет совершена работа $A = A' + A'' + A''' = 0,60\text{МДж}$. Заметим, что количество теплоты, которое отдал сосуд 1 $Q_1 = 1,64\text{МДж}$, в два с половиной раза больше, чем совершенная работа.

Для того чтобы точно рассчитать количество теплоты, полученное сосудом два, при изменении температуры в первом сосуде необходимо рассмотреть бесконечно малый участок этого процесса. Тогда

$$dQ_2 = T_2 \frac{dQ_1}{T_1} = T_2 \frac{c_1 m_1 dT_1}{T_1},$$

интегрируя это выражение получим

$$Q_2' = c_1 m_1 T_2 \ln \frac{T_1'}{T_1}.$$

Отличие численного значения, рассчитанного по этой формуле, от полученного ранее менее чем на 0,1%.

10.4. Рассмотрим условия равновесия шариков. На каждый из них действуют $m\vec{g}$ - сила тяжести, \vec{F} - сила кулоновского отталкивания, \vec{T} - сила натяжения нити. Шарик будет находиться в равновесии, когда суммарный момент сил, действующих на него будет равен нулю, что будет выполняться при

$$mgl \sin \theta = Fl \cos \theta. \quad (1)$$

Учитывая, что

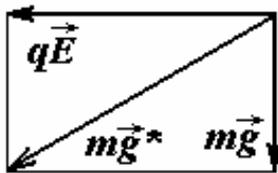
$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2l \sin \theta)^2}, \quad (2)$$

получим уравнение, определяющее угол отклонения нити

$$\frac{\sin^3 \theta}{\cos \theta} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2 mg}. \quad (3)$$

Приведенный в условии график, фактически является решением этого уравнения для различных значений q (в чем можно убедиться непосредственной подстановкой). По этому графику можно найти величину заряда каждого шарика $q \approx 2,6 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}$.

При включении однородного электрического поля на шарик начинает действовать дополнительная сила, которая постоянна и не



зависит от положения шариков, так же как и

сила тяжести. В таком случае разумно

«объединить» эту силу с силой тяжести и

ввести, так называемое, «эффективное»

ускорение свободного падения \vec{g}^* , модуль

которого

$$g^* = g \sqrt{1 + \left(\frac{qE}{mg}\right)^2}. \quad (4)$$

Тогда угол отклонения θ_1 каждой нити от направления вектора \vec{g}^* можно найти как решение уравнения (3), в котором необходимо заменить g на g^*

$$\frac{\sin^3 \theta_1}{\cos \theta_1} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2 mg^*}. \quad (5)$$

К сожалению, это уравнение элементарными методами не разрешимо. Поэтому еще раз воспользуемся предоставленным графиком, для чего перепишем (5) в виде

$$\frac{\sin^3 \theta_1}{\cos \theta_1} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2 m g^*} = \frac{\left(\sqrt{\frac{g}{g^*}} q\right)^2}{16\pi\epsilon_0 l^2 m g} \quad (6)$$

Как видно, это уравнений полностью совпадает с уравнением (3), если в качестве параметра q использовать величину

$$q^* = \sqrt{\frac{g}{g^*}} q = \frac{q}{\sqrt{1 + \left(\frac{qE}{vg}\right)^2}} \approx 1,0 \cdot 10^{-7} \text{ К.}$$

По графику находим $\theta_1 \approx 27^\circ$, следовательно, искомый угол между нитями равен $2\theta_1 \approx 54^\circ$.

10.5. На диск со стороны стержней действуют силы нормальной реакции \vec{N} и силы трения \vec{F}_{mp} . Диск прекратит движение, когда

$$F_{mp} \cos \alpha / 2 = N \sin \alpha / 2.$$

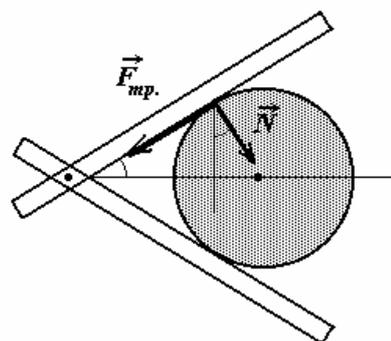
Учитывая, что

$$F_{mp} = \mu N,$$

найдем

$$\mu = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

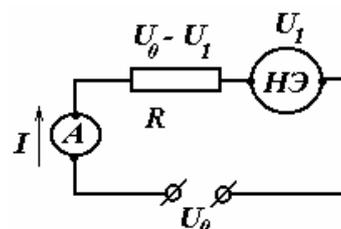
Заметим, что ответ не зависит от значения силы \vec{N} , поэтому «заклинивание» диска произойдет при данном угле при любом значении сил, действующих на стержни.



11.1 Обозначим напряжение на диоде U_1 , тогда напряжение на резисторе будет равно $U_0 - U_1$ (где U_0 - напряжение источника). Зависимость силы тока I через диод от напряжения U_1 задана в виде вольт-амперной характеристики

$$I = I(U_1). \quad (1)$$

Сила тока через резистор определяется законом Ома



$$I = \frac{U_0 - U_1}{R}. \quad (2)$$

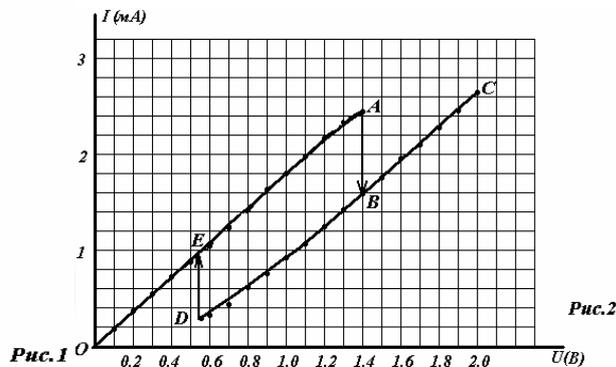
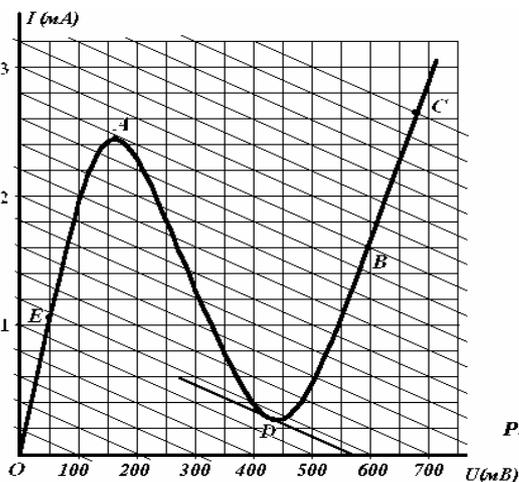
Так как резистор и нелинейный элемент соединены последовательно, то токи через эти элементы равны. Следовательно, ток в цепи I и напряжение U_1 могут быть найдены как решения системы уравнений (1)-(2). Явный вид функциональной зависимости $I = I(U_1)$ нам неизвестен, поэтому данную систему необходимо решать графически. Для этого на графике вольт-амперной характеристики проведем семейство прямых $I(U_1)$, удовлетворяющих уравнению (2) при различных значениях напряжения источника U_0 . Отметим, что эти прямые пересекают горизонтальную ось в точках $U_1 = U_0$, а коэффициент их наклона равен $-I/R$. Точка пересечения прямой с вольт-амперной характеристикой диода и будет давать решение системы (1)-(2) для данного значения U_0 .

Рассмотрим как будет изменяться сила тока в цепи при медленном увеличении напряжения источника. (см. рис.1). При напряжениях меньших 560 мВ имеется единственная точка пересечения (участок OE). Когда напряжение источника превысит 560 мВ появятся три точки пересечения прямой с характеристикой диода.

Покажем, что точки, лежащие на участке AD (участок, так называемого, «отрицательного сопротивления») неустойчивы, поэтому нереализуемы. Допустим, что сила тока в цепи и напряжений на диоде соответствуют некоторой точке на участке AD . Случайное незначительное увеличение напряжения на диоде приведет к уменьшению силы тока, следовательно, к уменьшению напряжения на резисторе, что в свою очередь еще больше увеличит напряжение на диоде. Аналогичная ситуация произойдет при случайном уменьшении напряжения на диоде. Таким образом, любое случайное отклонение от равновесного значения тока на участке отрицательного сопротивления приводит к возникновению причин, уводящих систему от этого равновесного состояния.

Далее, при медленном увеличении напряжения в системе не возникает никаких причин «перескочить» на ветвь DC , поэтому будут реализовываться состояния, соответствующие участку EA .

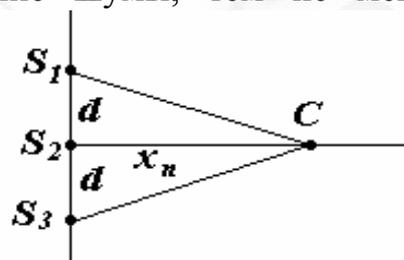
При достижении точки A , опять остается единственная точка



пересечения, но уже на участке BC , поэтому при дальнейшем увеличении напряжения будут реализовываться состояния, соответствующие этой ветви.

При обратном изменении напряжения, ситуация аналогична, только процесс пойдет по пути CBD , далее скачкообразный переход в точку E , затем по участку EO . Таким образом, в данной цепи реализуется своеобразная петля гистерезиса - значение силы тока при напряжениях источника от 560 мВ до 1200 мВ зависит от предшествующего состояния системы.

11.2 В данном случае наблюдается явление интерференции звуковых волн. На полученную зависимость громкости звука от координаты накладываются посторонние шумы, тем не менее, интерференционные максимумы прослеживаются достаточно четко. В предположении, что все источники излучают синфазно, условие максимума имеет вид - разность хода Δl между волнами от S_1, S_3 и S_2 должна равняться целому числу длин волн:



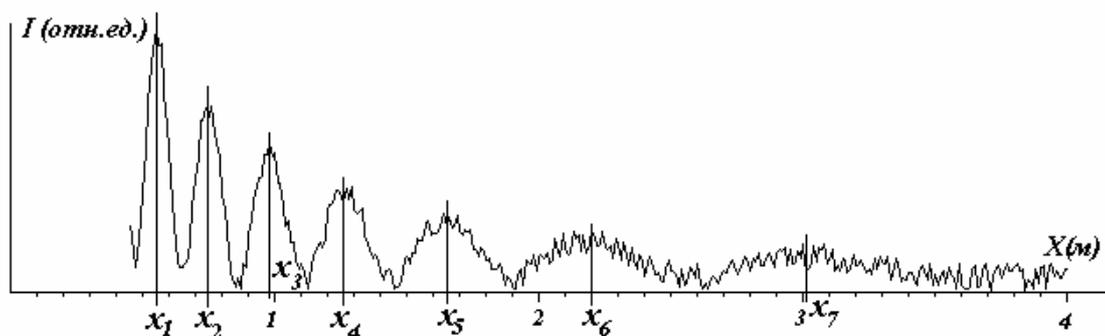
$$\Delta l = \sqrt{x_k^2 + d^2} - x_k = k\lambda . \quad (1)$$

где x_k - координата k -го максимума. По представленному графику мы не можем определить порядок максимума, поэтому пронумеруем их в порядке следования x_n . Определим по графику численные значения координат максимумов и для каждого из них по формуле (1) вычислим значение разности хода Δl_n , тогда разности $\Delta l_n - \Delta l_{n-1}$ должны приближенно равняться длине звуковой волны. Зная длину

волны λ и ее частоту ν скорость волны c можно вычислить по формуле

$$c = \lambda \nu. \quad (2)$$

Результаты обработки графика представлены на рисунке и в таблице.

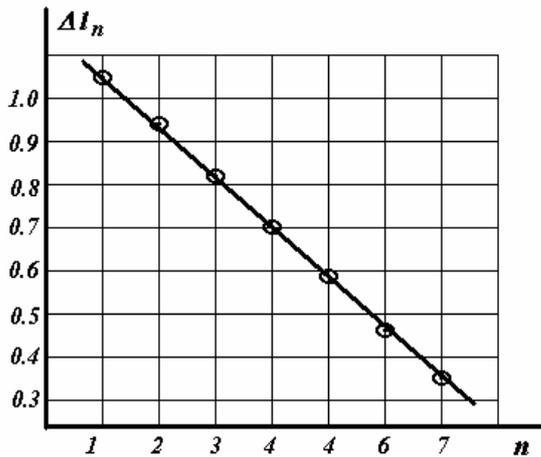


n	x_n	Δl_n	$\Delta l_n - \Delta l_{n-1}$
1	0,53	1,06	
2	0,75	0,93	0,13
3	0,98	0,80	0,13
4	1,27	0,69	0,11
5	1,68	0,57	0,12
6	2,20	0,46	0,11
7	3,02	0,35	0,11

Как следует из полученных результатов, сделанные предположения подтверждаются, различия в последнем столбце могут быть отнесены на счет неточностей снятия данных из исходного графика. Чтобы увеличить точность определения длины волны и оценить ее погрешность можно обработать данные последнего столбца стандартными методами обработки результатов измерений. В этом случае окончательный результат

$$\lambda = (0,12 \pm 0,02) \text{ м} . \text{ Тогда скорость звука } c = (3,5 \pm 0,6) \cdot 10^2 \text{ м / с} .$$

Более предпочтительной является обработка графическим методом с использованием метода наименьших квадратов. Построим график зависимости разности хода Δl_n от номера n .



Все точки этого графика ложатся на одну прямую, коэффициент наклона которой равен длине волны. Расчет этого коэффициента по методу наименьших квадратов приводит к результату

$$\lambda = (0,118 \pm 0,012) \text{ м}$$

Соответственно скорость звука

$$c = (3,5 \pm 0,3) \cdot 10^2 \text{ м / с}$$

Как видите, графическая обработка приводит к тому же численному значению, но с меньшей погрешностью.

Строго говоря, из-за уменьшения амплитуды звуковых колебаний по мере удаления от источника положения максимумов интенсивности несколько отличаются от тех, которые следуют из формулы (1). Однако, эти смещения в данном случае меньше погрешностей определения координат максимумов по предложенному графику.

Кстати, данный график рассчитан в предположении синфазности, источников равной интенсивности. Корректно учтено убывание амплитуды волны, добавлен случайный шум на уровне нескольких процентов.

11.3 Обозначим координату снаряда при его движении в стволе x . Уравнение движения снаряда на основании второго закона Ньютона и приближений, оговоренных в условии задачи, имеет вид

$$m_0 a = PS, \quad (1)$$

где a - ускорение снаряда, m_0 - его масса, P - давление пороховых газов в стволе, S - площадь поперечного сечения ствола. Для определения давления газов запишем уравнение состояния

$$PSx = \frac{m}{\mu} RT. \quad (2)$$

Так как газы поступают с постоянной скоростью, их масса зависит от времени по закону $m = \beta t$ ($\beta = 2,0 \cdot 10^3 \text{ кг / с}$ - скорость поступления газов). Таким образом уравнение движения приобретает вид

$$m_0 a = \frac{\beta RT}{\mu} \cdot \frac{t}{x}. \quad (3)$$

Для решения этого уравнения воспользуемся «подсказкой». Пусть закон движения имеет вид

$$x = Ct^\alpha, \quad (4)$$

тогда скорость снаряда V и его ускорение могут быть найдены как первая и вторая производные от данной функции

$$\begin{aligned} V &= \alpha Ct^{\alpha-1}, \\ a &= \alpha(\alpha-1)Ct^{\alpha-2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя выражения (4),(5) в уравнение (3), получим

$$m_0\alpha(\alpha-1)Ct^{\alpha-2} = \frac{\beta RT}{\mu} \cdot \frac{t}{Ct^\alpha}. \quad (6)$$

Это выражение должно быть справедливым в любые моменты времени, поэтому показатели степеней t должны быть одинаковы, поэтому $\alpha - 2 = 1 - \alpha$, отсюда находим $\alpha = \frac{3}{2}$. Так же из уравнения

(6) находим константу C

$$C^2 = \frac{\beta RT}{\alpha(\alpha-1)m_0\mu} = \frac{4\beta RT}{3m_0\mu}. \quad (7)$$

Итак, закон движения снаряда найден. В момент вылета снаряда τ его координата станет равной длине ствола, поэтому

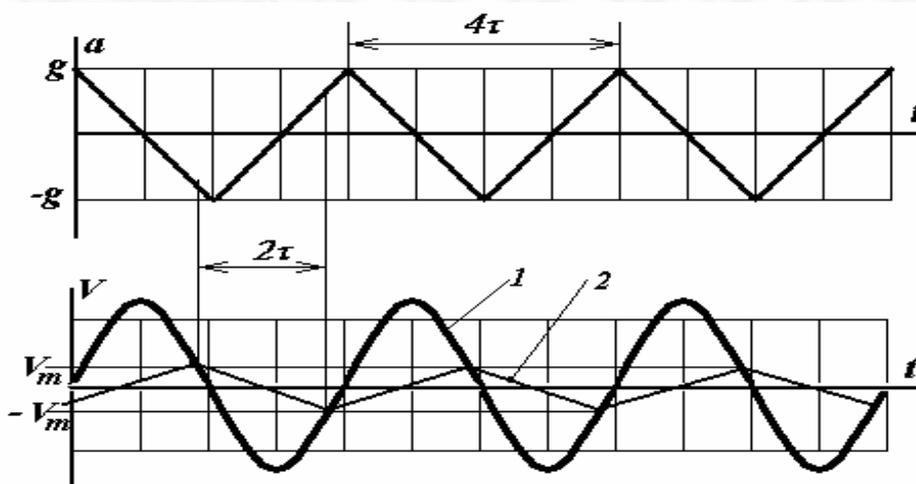
$$l = C\tau^{\frac{3}{2}}, \quad V = \frac{3}{2}C\tau^{\frac{1}{2}}.$$

Из этих выражений окончательно находим

$$V = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{4\beta RT}{3m_0\mu}} l \approx 550 \text{ м / с}$$

Не смотря на правдоподобный результат, оговоренные в условии приближения (пренебрежение силами сопротивления, постоянство температуры и скорости сгорания) являются довольно грубыми. Обратите внимание, согласно полученному решению ускорения снаряда в начальный момент времени стремится к бесконечности, что связано с нулевым объемом газа. Но, по-видимому, кратковременность этой стадии не оказывает определяющего влияния на конечный результат.

11.4 Попробуем рассчитать переходный режим (установление колебаний) вручную за короткое время, по-видимому, задача трудновыполнимая. Поэтому, обсудим возможный режим установившихся колебаний. Единственная сила, действующая на брусок в горизонтальном направлении (и заставляющая его двигаться) - сила трения со стороны колеблющейся ленты. Направление этой силы зависит от направления относительной скорости движения бруска, поэтому оно будет постоянно изменяться. Ускорение ленты, a , следовательно, и ее скорость меняются в достаточно больших пределах. Не составляет труда подсчитать максимальную скорость ленты - порядка 10 м/с. На нижнем рисунке схематически изображен график зависимости скорости ленты от времени - это набор отрезков параболл - кривая 1 (как будет видно ниже, нам не понадобится точный вид этой зависимости). Коэффициент трения между бруском и лентой транспортера невелик $\mu = 0,10$, поэтому ускорение бруска в 10 раз меньше максимального ускорения призмы. Следовательно, в установившемся режиме скорость бруска также будет изменяться в



небольших пределах, а остановки бруска относительно ленты будут происходить в те моменты времени, когда ее скорость мала, а ускорение велико. В эти моменты времени сила трения покоя не сможет удержать брусок на ленте, он будет постоянно проскальзывать относительно нее.

Следовательно, брусок будет двигаться с постоянным по модулю ускорением равным μg , а его скорость изменяться по линейному закону. В установившемся режиме период колебаний бруска совпадает с периодом колебаний ленты (конечно, это не гармонические колебания). Схематически зависимость скорости бруска от времени показана на рисунке (ломанная 2). Найдем

максимальное значение скорости бруска V_m . За промежуток времени 2τ его скорость изменяется от $-V_m$ до $+V_m$, при этом он движется равноускоренно, поэтому

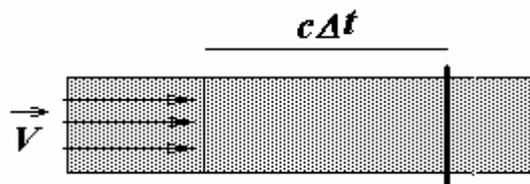
$$V_m = -V_m + \mu g \cdot 2\tau.$$

Откуда следует $V_m = \mu g \tau \approx 1,0 \text{ м/с}$, что в десять раз больше максимальной скорости ленты, поэтому предположение о том, что в моменты времени, когда скорости бруска и ленты равны, ускорение ленты превышает по модулю μg полностью оправдано. Максимальное смещение бруска при таком движении, амплитуда его колебаний, определяется формулой

$$X_m = V_m \tau = \mu g \tau^2 \approx 0,98 \text{ м}$$

Заметим, что закон движения бруска не зависит от закона движения ленты, если только последняя движется по периодическому закону с достаточно большой амплитудой. В частности, наше решение остается справедливым, если ускорение ленты изменяется в тех же пределах, но по гармоническому закону. Так же отметим, что утверждение о равенстве периодов вынужденных колебаний и вынуждающей силы справедливо для любых типов колебаний.

11.5 Гидродинамический удар в трубах возникает при резкой остановке течения воды, в следствие возникновения сил препятствующих этому движению. После перекрывания трубы в



жидкости возникает волна сжатия которая движется со скоростью звука в воде c . Следовательно за малый промежуток времени Δt останавливается столб воды длиной $l = c\Delta t$. Сила F , которая приводит к остановке, с одной стороны равна PS , (где P - избыточное давление в трубе, S - площадь поперечного сечения трубы), а с другой определяется вторым законом Ньютона $F\Delta t = m\Delta V$. Приравнивая эти выражения, получим

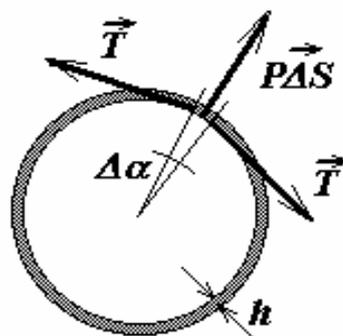
$$c\Delta t S \rho V = PS\Delta t.$$

Откуда находим избыточное давление

$$P = \rho c V.$$

Интересно отметить, что в данном случае численное значение $P \approx 1,5 \cdot 10^6 \text{ Па} \approx 15 \text{ атм}$.

Найдем теперь толщину стенок трубы, которые могут выдержать пятикратное превышение этого давления. Выделим на стенке трубы небольшой участок длиной l и видимый из центра под малым углом $\Delta\alpha$. Сила давления $P\Delta S = Pr \Delta\alpha l$ должна быть уравновешена силами упругости, возникающими в стенках трубы T , модуль суммы которых равен



$$T\Delta\alpha = \sigma h l \Delta\alpha,$$

где σ - механическое напряжение в стенках трубы, которое не превышает σ_{np} . Учитывая, что давление должно в $n = 5$ раз превышать давление гидродинамического удара, получим из условия равновесия

$$ncV\rho r \Delta\alpha l = \sigma_{np} l h \Delta\alpha.$$

Из этой формулы следует

$$h = \frac{nc\rho Vr}{\sigma_{np}} \approx 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$