

Условие

11-3. Длина ствола пушки равна 5,0м, масса снаряда 45кг. Во время выстрела порох сгорает с постоянной скоростью $2,0 \cdot 10^3$ кг/с. Температура пороховых газов равна 1000К, его средняя молярная масса $50 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Считая силу давления пороховых газов во время выстрела значительно большей всех остальных сил, действующих на снаряд, найдите скорость снаряда при вылете из ствола. Считать, что во время горения порох полностью превращается в газ, изменением температуры которого за время выстрела можно пренебречь. *Подсказка.* Во время движения снаряда в стволе его смещение пропорционально t^α (t - время, α - постоянная, которую надо найти).

Решение

11.3 Обозначим координату снаряда при его движении в стволе x . Уравнение движения снаряда на основании второго закона Ньютона и приближений, оговоренных в условии задачи, имеет вид

$$m_0 a = PS, \quad (1)$$

где a — ускорение снаряда, m_0 — его масса, P — давление пороховых газов в стволе, S — площадь поперечного сечения ствола. Для определения давления газов запишем уравнение состояния

$$PSx = \frac{m}{\mu} RT. \quad (2)$$

Так как газы поступают с постоянной скоростью, их масса зависит от времени по закону $m = \beta t$ ($\beta = 2,0 \cdot 10^3$ кг/с — скорость поступления газов). Таким образом уравнение движения приобретает вид

$$m_0 a = \frac{\beta RT}{\mu} \cdot \frac{t}{x}. \quad (3)$$

Для решения этого уравнения воспользуемся «подсказкой». Пусть закон движения имеет вид

$$x = Ct^\alpha, \quad (4)$$

тогда скорость снаряда V и его ускорение могут быть найдены как первая и вторая производные от данной функции

$$V = \alpha C t^{\alpha-1},$$

$$a = \alpha(\alpha - 1) C t^{\alpha-2}. \quad (5)$$

Подставляя выражения (4),(5) в уравнение (3), получим

$$m_0\alpha(\alpha-1)Ct^{\alpha-2} = \frac{\beta RT}{\mu} \cdot \frac{t}{Ct^\alpha}. \quad (6)$$

Это выражение должно быть справедливым в любые моменты времени, поэтому показатели степеней t должны быть одинаковы, поэтому $\alpha - 2 = 1 - \alpha$, отсюда находим $\alpha = \frac{3}{2}$. Так же из уравнения (6) находим константу C

$$C^2 = \frac{\beta RT}{\alpha(\alpha-1)m_0\mu} = \frac{4\beta RT}{3m_0\mu}. \quad (7)$$

Итак, закон движения снаряда найден. В момент вылета снаряда τ его координата станет равной длине ствола, поэтому

$$l = C\tau^{\frac{3}{2}}, \quad V = \frac{3}{2}C\tau^{\frac{1}{2}}.$$

Из этих выражений окончательно находим

$$V = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{4\beta RT}{3m_0\mu}} l \approx 550 \text{ м/с}$$

Не смотря на правдоподобный результат, оговоренные в условии приближения (пренебрежение силами сопротивления, постоянство температуры и скорости сгорания) являются довольно грубыми. Обратите внимание, согласно полученному решению ускорения снаряда в начальный момент времени стремится к бесконечности, что связано с нулевым объемом газа. Но, по-видимому, кратковременность этой стадии не оказывает определяющего влияния на конечный результат.