

Условие

10-3. Тепловой насос работает по идеальному обратному циклу Карно, забирая теплоту из теплоизолированного сосуда 1, содержащего $m_1 = 3,0$ кг воды при температуре $t_1 = 30^\circ\text{C}$ и передавая ее сосуду 2, содержащему $m_2 = 1,0$ кг горячей воды, находящейся при температуре кипения $t_2 = 100^\circ\text{C}$. Какая температура установится в сосудах 1, когда в сосуде 2 вся вода выкипит? Какую работу совершит при этом тепловой насос? Теплоемкость воды $c_1 = 4,2$ кДж/(кг · К); теплоемкость льда $c_2 = 2,1$ кДж/(кг · К); удельная теплота парообразования $r = 2260$ кДж/кг; удельная теплота плавления льда $\lambda = 336$ кДж/кг.

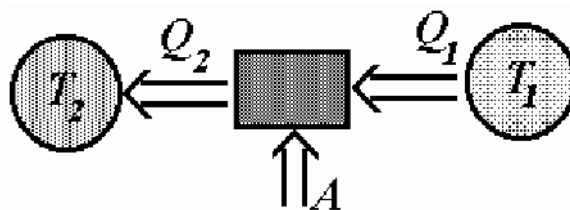
Решение

10.3. Для идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно, выполняется соотношение

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}, \quad (1)$$

где Q_1, Q_2 - теплоты, отданная нагревателем и полученная холодильником; T_1, T_2 - температуры нагревателя и холодильника, соответственно. Это же соотношение выполняется и для холодильной машины, работающей по обратному циклу, в котором от холодильника теплоту забирают и передают нагревателю. Мы используем соотношение (1), для того чтобы рассчитать количество теплоты, забранное у холодильника.

Принцип работы холодильной машины представлен на рисунке в виде схемы: из сосуда 1, содержащего воду при температуре T_1 холодильник забирает Q_1 теплоты, при этом внешние силы совершают работу A и количество теплоты $Q_2 = Q_1 + A$ передается сосуду 2, в котором находится вода при температуре T_2 . Так как вода в сосуде 2 находится при температуре кипения, то эта температура изменяться не будет. Вода же в сосуде 1 будет остывать, возможно, затем замерзать. Поэтому необходимо проводить расчеты поэтапно с количественными результатами на каждом этапе.



Первый этап. Остывание воды до температуры замерзания. Холодильник забирает количество теплоты

$$Q'_1 = c_1 m_1 \Delta t_1 = 0,38 \text{ МДж},$$

где $\Delta t_1 = 30^\circ\text{C}$ - изменение температуры воды в первом сосуде. В процессе остывания температура изменяется, поэтому строго говоря, для вычисления количества теплоты переданной в сосуд 1, необходимо рассматривать процесс, разбивая его на бесконечно малые участки. Однако, так как относительное изменение абсолютной температуры не велико (порядка 10%), то мы в расчетах примем среднее значение температуры $T'_1 = 273 + 15 = 288\text{K}$. На этом этапе сосуд 2 получит

$$Q'_2 = \frac{T_2}{T'_1} Q'_1 = 0,49 \text{ МДж.}$$

Этого количества теплоты хватит, чтобы испарить

$$\Delta m'_2 = \frac{Q'_2}{r} = 0,22 \text{ кг}$$

воды (вся вода не испарилась - надо греть дальше). Работа, совершенная на первом этапе

$$A' = Q'_2 - Q'_1 = 0,11 \text{ МДж.}$$

Второй этап. Замерзание воды. Сосуд 1 отдаст

$$Q''_1 = \lambda m_1 = 1,0 \text{ МДж};$$

сосуд 2 получит

$$Q''_2 = \frac{T_2}{T''_1} Q''_1 = 1,37 \text{ МДж,}$$

(здесь $T''_1 = 273K$ - температура замерзания воды); при этом испарится

$$\Delta m''_2 = \frac{Q''_2}{r} = 0,61 \text{ кг,}$$

совершена работа

$$A'' = Q''_2 - Q''_1 = 0,37 \text{ МДж.}$$

Как следует, из полученных расчетов, и после этого этапа не вся вода испарилась, осталось $\Delta m'''_2 = m_2 - \Delta m'_2 - \Delta m''_2 = 0,17 \text{ кг.}$

Третий этап. Остывание льда.

На этом этапе нам необходимо решать обратную задачу - легко найти количество теплоты, которое получит кипящая вода $Q'''_2 = r \Delta m'''_2 = 0,38 \text{ МДж.}$ Требуется определить сколько теплоты отдаст лед. На этом этапе температура T_1 так же изменяется, но мы по прежнему в расчетах используем ее среднее значение $T'''_1 = T''_1 - \frac{\Delta t_2}{2}$, где Δt_2 - изменение температуры льда. Тогда $Q'''_1 = c_2 m_1 \Delta t_2$, а по формуле (1) $Q'''_1 = \frac{T'''_1}{T_2} Q'''_2$. Приравнивая эти два выражения, найдем

$$\Delta t_2 = T'''_1 \left(\frac{c_2 m_1 T_2}{Q'''_2} + \frac{1}{2} \right)^{-1} = 41^\circ.$$

Таким образом, в сосуде 1 будет находится лед при температуре $-41^\circ C$.

На третьем этапе лед отдаст $Q_1''' = c_2 m_1 \Delta t_2 = 0,26 \text{ МДж}$ теплоты, следовательно совершена работа

$$A''' = Q_2''' - Q_1''' = 0,12 \text{ МДж}.$$

Итого, в процессе испарения воды будет совершена работа $A = A' + A'' + A''' = 0,60 \text{ МДж}$. Заметим, что количество теплоты, которое отдал сосуд 1 $Q_1 = 1,64 \text{ МДж}$, в два с половиной раза больше, чем совершенная работа.

Для того чтобы точно рассчитать количество теплоты, полученное сосудом два, при изменении температуры в первом сосуде необходимо рассмотреть бесконечно малый участок этого процесса. Тогда

$$dQ_2 = T_2 \frac{dQ_1}{T_1} = T_2 \frac{c_1 m_1 dT_1}{T_1},$$

интегрируя это выражение получим

$$Q_2' = c_1 m_1 T_2 \ln \frac{T_1}{T_1'}.$$

Отличие численного значения, рассчитанного по этой формуле, от полученного ранее менее чем на 0,1%.