

Условие

10-2. Два одинаковых цилиндрических бака расположены один над другим и соединены между собой трубой с насосом. Баки частично заполнены водой. Площади оснований баков равны S . На сколько изменится вес всей системы, когда насос начнет перекачивать воду из нижнего бака в верхний с постоянной скоростью V (м³/с)? А если насос будет перекачивать воду из верхнего в нижний с той же скоростью?

Решение

10.2. Для решения данной задачи удобно воспользоваться уравнением движения для системы тел: произведение массы системы на ускорение центра масс равно сумме внешних сил, действующих на систему. В данном случае

$$Ma_c = P - Mg, \quad (1)$$

где M - масса всей системы, P - ее вес, a_c - ускорение центра масс. Когда вода (а, следовательно и центр масс) неподвижна, то вес системы P_0 равен силе тяжести Mg . Поэтому изменение веса при перекачке воды определяется выражением

$$\Delta P = Ma_c. \quad (2)$$

При перекачке уровни воды в сосудах h_1 и h_2 будут изменяться, конечно, по линейному закону

$$\begin{aligned} h_1 &= h_{10} + \frac{V}{S}t \\ h_2 &= h_{20} - \frac{V}{S}t \end{aligned} \quad (3)$$

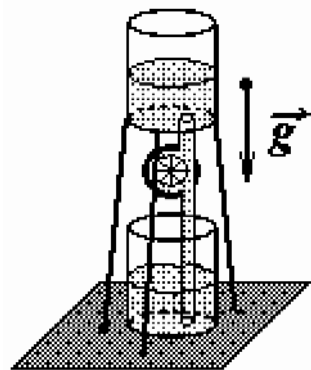
но положение центра масс всей системы будет изменяться по закону квадратичному. Действительно, высота центра масс Z_c может быть найдена из уравнения

$$MZ_c = M_0Z_0 + \rho Sh_1(l + \frac{h_1}{2}) + \rho Sh_2 \frac{h_2}{2}, \quad (4)$$

где M_0 , Z_0 - масса и высота центра масс установки без воды, l - высота верхнего бака. Подставляя выражения (3), получим

$$\begin{aligned} MZ_c &= M_0Z_0 + \rho Slh_{10} + \frac{1}{2}\rho Sh_{10}^2 + \\ &+ \frac{1}{2}\rho Sh_{20}^2 + \rho V(l + h_{10} + h_{20})t + \rho \frac{V^2}{S}t^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Из выражений (2) и (5) следует



$$\Delta P = Ma_c = 2\rho \frac{V^2}{S}$$

Заметим, что ответ не зависит от того, перекачивают воду вверх или вниз. Может эта задача вам покажется более понятной, если Вы проведете аналогию с двумя грузами, подвешенными на нити, перекинутой через блок. При ускоренном движении грузов вес всей системы также изменяется. Замените грузы тяжелой однородной веревкой и Вы получите простейший механический аналог этой задачи.