

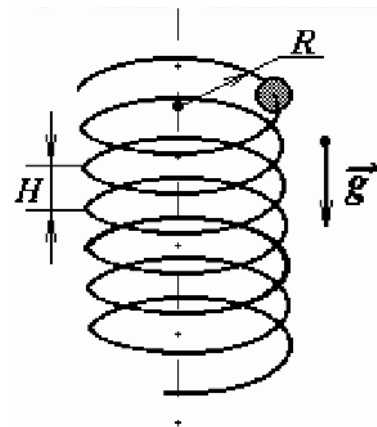
Условие

9-3. Небольшая бусинка начинает скользить по спирали радиусом R , ось которой вертикальна. Определите величину скорости установившегося движения бусинки, если коэффициент ее трения о спираль равен μ . Шаг спирали h .

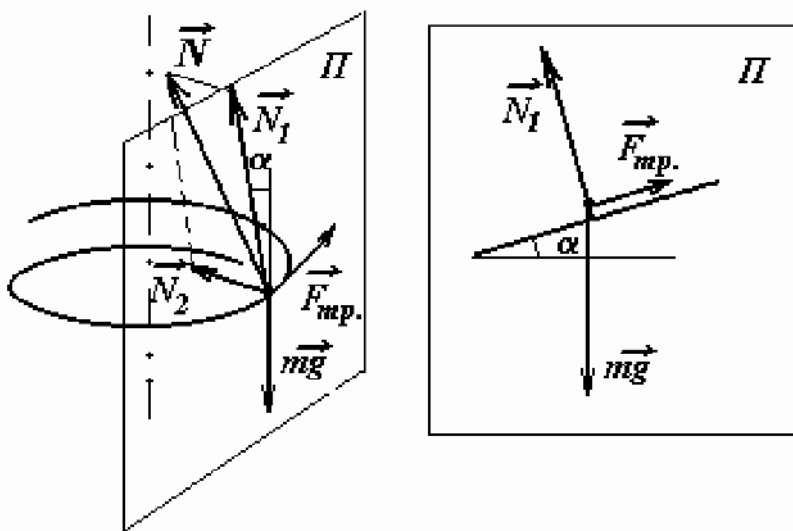
Решение

9-3. Мы имеем типичный пример системы, самостоятельно приходящей в состояние динамического равновесия. Вначале бусинка разгоняется,

растет скорость, а вместе с ней и сила реакции опоры $\vec{N}$, направленная перпендикулярно касательной к участку спирали, следовательно, возрастает и сила трения $\vec{F}$, направленная вдоль касательной к траектории в сторону противоположную скорости, причем модуль этой силы определяется известным законом $F = \mu N$. Через определенное время бусинка будет двигаться с установившейся скоростью. Опустившись на один виток, бусинка расходует запас потенциальной энергии на работу против сил трения (кинетическая энергия при этом больше не меняется)



$$mgH = FS = \mu N \sqrt{4\pi^2 R^2 + H^2}, \quad (1)$$



где $S = \sqrt{4\pi^2 R^2 + H^2}$ - длина одного витка спирали. Разложим силу реакции $\vec{N}$ на две составляющие:

$$N_1 = mg \cos \alpha$$

- в вертикальной плоскости Π , касательной к участку спирали, и

$$N_2 = \frac{m(v \cos \alpha)^2}{R}$$

- в горизонтальной плоскости. Выражения для этих компонент получены из следующих рассуждений: в вертикальном направлении движение бусинки является равномерным со скоростью $v \sin \alpha$, следовательно в проекции на любую ось, лежащую в вертикальной плоскости, касательной к траектории сумма всех проекций сил, действующих на бусинку, равна нулю; в горизонтальной плоскости движение бусинки является равномерным движением по окружности радиуса R со скоростью $v \cos \alpha$, следовательно, бусинка движется с центростремительным ускорением, которое ей сообщает компонента силы реакции N_2 . Таким образом, модуль силы реакции определяется выражением

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = \sqrt{m^2 g^2 \cos^2 \alpha + \frac{m^2 v^4 \cos^4 \alpha}{R^2}}. \quad (2)$$

В этих выражениях α - угол между касательной к траектории и спиралью. Из простых геометрических построений находим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{2\pi R}, \quad \cos \alpha = \frac{l}{l + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{4\pi R^2}{4\pi^2 R^2 + H^2}. \quad (3)$$

Подставляя полученные выражения в (1), получаем уравнение относительно скорости v

$$\frac{g^2 H^2}{\mu^2} = 4\pi^2 R^2 g^2 + \frac{16v^4 \pi^4 R^2}{4\pi^2 R^2 + H^2}.$$

Разрешая уравнение, находим искомую скорость установившегося движения бусинки

$$v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{R}} \sqrt[4]{(4\pi^2 R^2 + H^2) \left(\frac{H^2}{\mu^2} - 4\pi^2 R^2 \right)}.$$

9-4. Выберем начало системы отсчета на башне, задачу будем решать в векторном виде. К моменту вылета второго камешка первый совершит перемещение

$$\Delta \vec{r}_0 = \vec{v}_0 \Delta t + \frac{\vec{g} \Delta t^2}{2}$$

и будет двигаться со скоростью

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g} \Delta t.$$

Перемещения камешков после бросания второго камешка запишутся следующим образом

$$\Delta \vec{r}_1(t) = \vec{v}_0(t + \Delta t) + \frac{\vec{g}(t + \Delta t)^2}{2},$$

$$\Delta \vec{r}_2(t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2}.$$

Перейдем в систему отсчета, связанную со вторым камешком. Тогда относительное положение первого камешка задается вектором

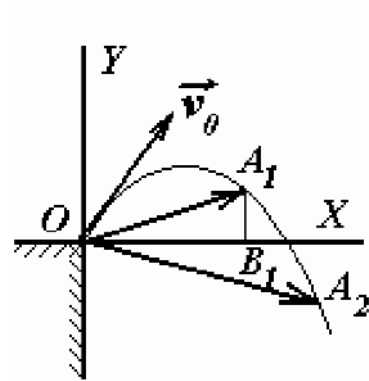
$$\vec{S} = \Delta \vec{r}_1(t) - \Delta \vec{r}_2(t) = \vec{v}_0 \Delta t + \frac{\vec{g} \Delta t^2}{2} + \vec{g} \Delta t \cdot t = \Delta \vec{r}_0 + \vec{g} \Delta t \cdot t,$$

т.е. это движение вертикально вниз со скоростью $\vec{g} \Delta t$. Поэтому

1) если Δt таково, что первый камешек не успел опуститься ниже горизонта точки бросания (точка A_1), тогда наименьшее расстояние будет равно

$$CB_1 = (\Delta \vec{r}_0)_x = \left(\vec{v}_0 \Delta t + \frac{\vec{g} \Delta t^2}{2} \right)_x = v_0 \cos \alpha \Delta t. \quad (1)$$

Оно будет достигнуто в момент, когда оба шарика будут на одной высоте, т.е.



$$S_y = 0 = (\Delta \vec{r}_0)_y - g \Delta t \cdot t = v_0 \sin \alpha \Delta t - \frac{g \Delta t^2}{2} - g \Delta t \cdot t, \quad t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} - \frac{\Delta t}{2}. \quad (2)$$

2) если Δt таково, что первый камешек опустился ниже горизонта бросания (A_2), наименьшим расстоянием будет начальное, т.е.

$$OA_2 = |\Delta \vec{r}_0| = \sqrt{(v_0 \cos \alpha \Delta t)^2 + \left(v_0 \sin \alpha \Delta t - \frac{g \Delta t^2}{2} \right)^2}, \quad (3)$$

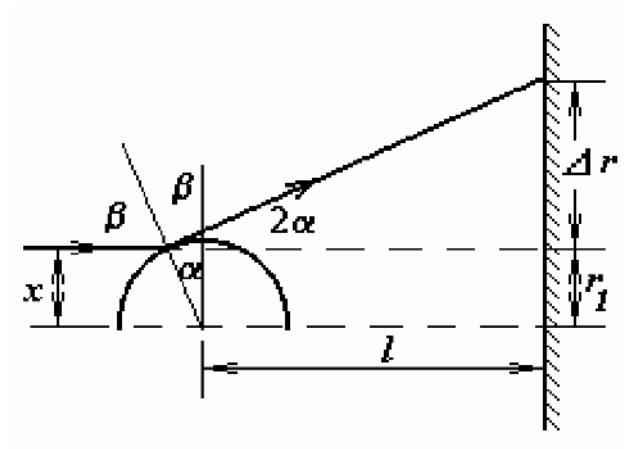
а момент времени $t = 0$.

(4)

Условие выбора ответа следует из (2): если $\Delta t > \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$, то ответ - (3),(4),

если $\Delta t < \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$, то - (1),(2).

9-5. Небольшая тень по центру означает, что шарик имеет размеры, ненамного превышающие диаметр пучка света (подумайте почему?). Рассмотрим крайний луч. Для него β - угол падения и $\alpha + \beta = \pi/2$.



Следовательно, после отражения луч отклонится на угол 2α , причем

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\Delta r}{x \sin \alpha + l}.$$

Ясно, что поскольку $\Delta r = 1\text{ см}$, а $l = 1\text{ м}$, то угол α - мал, и $x \sin \alpha$ можно опустить в знаменателе, тогда

$$\operatorname{tg} 2\alpha \approx 2\alpha \approx \Delta r / l; \Rightarrow \alpha \approx \Delta r / 2l \approx 0,5 \cdot 10^{-2}$$

Как видно из рисунка

$$x = r_l \cos \alpha \approx r_l (1 - \alpha^2 / 2)$$

Таким образом диаметр шарика примерно равен 2см (немного меньше).