

Условие

11-5. Два металлических стержня равного поперечного сечения изготовлены из материалов одинаковой теплопроводности, но разных коэффициентов теплового расширения. Длины стержней в тающем льде и кипящей воде соответственно l_1 и l_2 , L_1 и L_2 . Соединим стержни торцами и поместим конец первого в тающий лёд, а конец второго в кипящую воду. Определите длину системы в этом состоянии. Температура плавления льда T_1 , температура кипения воды T_2 .

соответственно l_1 и l_2 , L_1 и L_2 . Соединим стержни торцами и поместим конец первого в таящий лёд, а конец второго в кипящую воду. Определите длину системы в этом состоянии. Температура плавления льда T_1 , температура кипения воды T_2 .

Решение

11-5. Так как теплопроводности стержней одинаковы, то температура вдоль стержней будет изменяться по линейному закону. Температура точки соединения стержней T_3 может быть найдена из соотношения

$$T_3 = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{l_1 - l_2} l_1 = \frac{T_1 l_2 + T_2 l_1}{l_1 + l_2}, \quad (1)$$

при выводе, которого считается, что удлинения стержней малы. Теперь не трудно вычислить средние температуры стержней

$$T_{\text{ср1}} = \frac{T_1 + T_3}{2}, \quad T_{\text{ср2}} = \frac{T_3 + T_2}{2}. \quad (2)$$

Удлинения стержней пропорциональны изменению температуры

$$\Delta l = k \Delta T,$$

$$l = l_1 + k_1 (T_{\text{ср1}} - T_l) + l_2 + k_2 (T_{\text{ср2}} - T_l),$$

где все параметры этого выражения известны.

причем коэффициенты пропорциональности следует выразить через приведенные в условии данные

$$k_1 = \frac{L_1 - l_1}{T_2 - T_1}, k_2 = \frac{L_2 - l_2}{T_2 - T_1}. \quad (3)$$

Окончательно, получим искомую длину

$$l = l_1 + k_1 (T_{cp1} - T_1) + l_2 + k_2 (T_{cp2} - T_1),$$

где все параметры этого выражения известны.