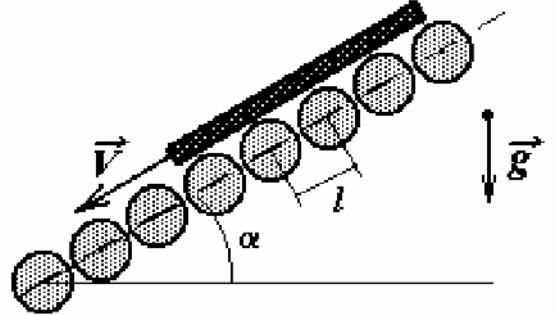


## Условие

**10-1.** Однородная балка массой  $M$  и длиной  $L$  движется по наклонному прокатному стану, представляющему собой шероховатые тонкостенные неслепящиеся цилиндры, оси которых параллельны и находятся на расстоянии  $l$  друг от друга ( $l \ll L$ ). Масса каждого цилиндра  $m$ . Определите установившуюся скорость движения балки по стану. Угол наклона стана к горизонту  $\alpha$ .

## Решение

**10-1.** Поскольку цилиндры шероховатые, то при движении балки раскручиваются цилиндры, находящейся под ней, на что расходуется потенциальная энергия опускающейся балки. В идеализированном варианте после прохождения балки будут вращаться все цилиндры прокатного стана. Это обстоятельство и приводит к тому, что в конце концов движение станет равномерным.



Для решения задачи воспользуемся энергетическими соображениями. Пусть искомая скорость  $v$ . За время  $\tau$  ( $\tau \gg \frac{l}{v}$ ) балка пройдет по стану путь  $S = v\tau$ , при этом освободится потенциальная энергия

$$E^n = Mgv\tau \sin \alpha. \quad (1)$$

При этом раскручивается до прекращения проскальзывания  $N = \frac{v\tau}{l}$  новых цилиндров, кинетическая энергия которых

$$E^k = N \frac{l}{2} mv^2. \quad (2)$$

При записи (1) учтено, что цилиндры тонкостенные и все точки цилиндров имеют одинаковую скорость. Для корректного решения задачи необходимо учесть неизбежное выделение теплоты при проскальзывании и трении балки о цилиндры. Для вычисления этой энергии заметим, что (2) аналогично выражению для кинетической энергии материальной точки, поэтому рассмотрим шайбу массы  $m$  аккуратно, (т. е. без начальной скорости) положенную на шероховатую горизонтальную ленту транспортера, движущуюся со скоростью  $v$ . Под действием трения скольжения шайба начнет набирать скорость с ускорением  $a = \mu g$ , а через время  $\tau^* = \frac{v}{\mu g}$  трение скольжения исчезнет.

При этом выделяется теплота:

$$Q = \sum_i F_{\text{тр}} v_i \Delta t_i = F_{\text{тр}} \sum_i v_i \Delta t_i = \{v = at\} = F_{\text{тр}} \frac{v}{2} \tau^*. \quad (3)$$

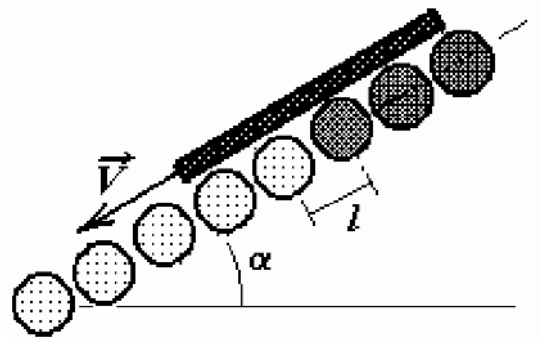
С другой стороны, согласно основному закону динамики в импульсной форме:

$$mv = F_{\text{тр}}\tau^*. \quad (4)$$

Из (3)-(4) легко находим:

$$Q = \frac{1}{2}mv^2.$$

Таким образом мы показали, что при разгоне трением скольжения, энергетические (тепловые) потери равны кинетической энергии тела в конечном состоянии, т. е. пренебрегать ими нельзя. Возвращаясь к цилиндрам, заметим, что все вышесказанное будет справедливо, если балка достаточно длинна, т. е. иначе  $\tau^* < \frac{L}{v}$  (чтобы проскальзывание успело исчезнуть). На рисунке раскрученные цилиндры заштрихованы, а раскручивающиеся — нет.



С учетом изложенного баланс энергий запишется в виде

$$E^n = E^k + Q = 2E^k = mv^2 N. \quad (5)$$

Далее

$$Mgv\tau \sin \alpha = \frac{v\tau}{l}mv^2. \quad (6)$$

Откуда

$$v^2 = gl \frac{M}{m} \sin \alpha \Rightarrow v = \sqrt{gl \frac{M}{m} \sin \alpha}. \quad (7)$$