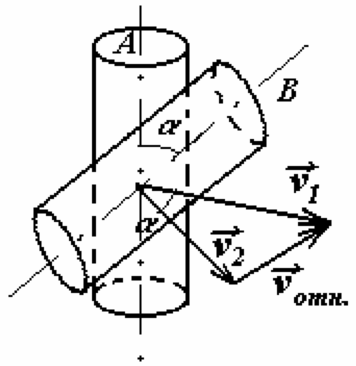
Лида1995 г. (Решения)



9-1. В первый момент после соприкосновения относительная скорость поверхностей цилиндров равна скорости поверхности нижнего цилиндра $v_1 = 2\pi n_1 R_1$. Нормальная относительно оси OB составляющая этой скорости, (точнее, силы трения) раскручивает цилиндр. Возникает сила трения за счет разности относительных скоростей. Нормальная составляющая силы трения исчезает, когда относительная скорость $\vec{v}_{отн.} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ станет параллельна оси OB. Из прямоугольного треугольника скоростей $v_2 = v_1 \cos\alpha$ или через частоты

$$2\pi n_2 R_2 = 2\pi n_1 R_1 \cos\alpha .$$

Откуда искомая частота

$$n_2 = \frac{R_1 n_1 \cos\alpha}{R_2}.$$

9-2. По условию задачи система находится в вертикальной плоскости, т.е. в плоскости рисунка. Ввиду симметричного разъезжания стержней скорости нижних тел, скользящих по плоскости, одинаковы по модулю

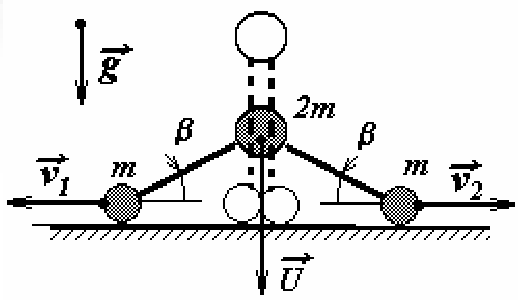
$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|$$

Диссипативные силы отсутствуют, поэтому можно воспользоваться законом сохранения энергии. Будем считать, что значение потенциальной энергии отсчитывается от плоскости основания. Тогда

$$E_{пот.1} = E_{пот.2} + E_{кин.2},$$

где

$$E_{пот.1} = 2mgl,\ E_{пот.2} = 2mgl\sin\beta,\ E_{кин.2} = \frac{2mu^2}{2} + 2\frac{mv^2}{2} = m\left(u^2 + v^2\right).$$



Подстановка соотношений для энергий в закон сохранения дает

$$2gl = 2glsib\beta + u^2 + v^2. \qquad (1)$$

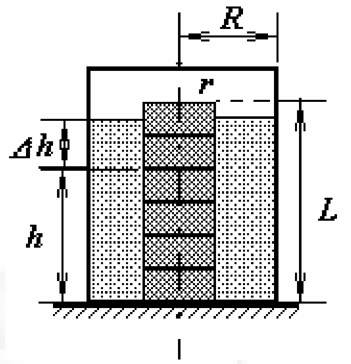
С другой стороны, неизменность длины стержня (по условию стержни жесткие) позволяет записать второе уравнение для проекций скоростей движения тел на направление прямой, проходящей по оси стержня

$$v\cos\beta = u\sin\beta, \Rightarrow v = utg\beta. \qquad (2)$$

Совместное решение (1), (2) позволяет выразить скорости шариков

$$u = \cos\beta\sqrt{2gl(1-\sin\beta)},\ v = \sin\beta\sqrt{2gl(1-\sin\beta)}.$$

9-3. Пусть длина всей пирамиды, которая коснулась дна, есть L. Запишем условие плавания тел



$$F_{арх} = mg$$

или

$$(h+\Delta h)\pi r^2 \rho g = \pi r^2 L \rho_c g,$$

где Δh – подъем уровня жидкости, вследствие вытеснения ее цилиндрами. После сокращения получим

$$(h+\Delta h)\rho = L\rho_c. \quad (1)$$

Условие несжимаемости жидкости позволяет написать второе уравнение

$$\pi r^2 h = \pi\left(R^2 - r^2\right)\Delta h. \qquad (2)$$

из (1) и (2) следует, что

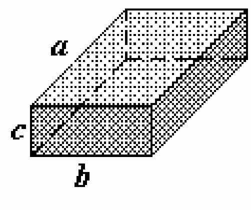
$$L = \frac{R^2}{R^2 - r^2}\cdot\frac{\rho}{\rho_c}h.$$

Теперь совсем просто подсчитать число цилиндров в колонне

$$N = \frac{L}{l},$$

причем, если L нацело делится на l, то это и будет ответ в задаче. Если же в результате деления мы получаем дробное число, то ответом будет следующее утверждение: число цилиндров равно целой части числа $\frac{R^2\rho h}{(R^2 - r^2)\rho_c l}$ плюс еще один.

9-4. Внешний вид нагревательного элемента приведен на рисунке. Мощность тепловыделения не резисторе



$$P = U^2/R,$$

где его сопротивление

$$R = \rho_{эл.}\frac{l}{S}.$$

Здесь $\rho_{эл.}$ – удельное сопротивление меди, l – длина проводника, S – площадь поперечного сечения. Имеем три различных варианта подключения. Пусть для определенности $a > b > c$. Тогда

$$P_1 = P_a = \frac{U^2}{\rho_{эл.}\, a/bc} = \frac{U^2 bc}{\rho_{эл.} a},\; P_2 = P_b = \frac{U^2 ac}{\rho_{эл.} b},\; P_3 = P_c = \frac{U^2 ab}{\rho_{эл.} c},$$

причем

$$P_1 : P_2 = \frac{U^2 bc}{\rho_{эл.} a} : \frac{U^2 ac}{\rho_{эл.} b} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2},\;\; a = \sqrt{2}\, b,$$

$$P_2 : P_3 = \frac{c^2}{b^2} = \frac{1}{4},\; b = 2c.$$

С другой стороны, нам известен объем всего куска меди

$$V = abc = \sqrt{2}\, 2^2 c^3 = m/\rho.$$

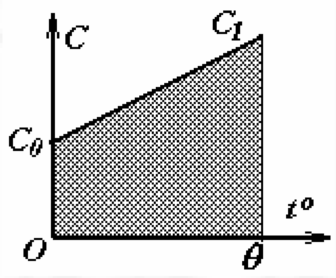
Теперь несложно найти размеры всех сторон

$$c = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}\, m}{8\rho}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}\cdot 4{,}5}{8\cdot 9\cdot 10^3}} \approx 4{,}5\, см,\;\; b = 2c = 9{,}0\;см,\; a\sqrt{2}\, b \approx 12{,}6\;см.$$

9-5. Задача решается с помощью уравнения теплового баланса. Горячая вода отдает

$$Q_{отд.} = m_1 c_1 (t_1 - \theta) \qquad (1)$$

теплоты, где θ – окончательная температура в калориметре. Это количество теплоты передается бруску, специфическое свойство которого – зависимость теплоемкости от температуры $C(t)$, усложняет процедуру расчета. Площадь под графиком зависимости $C(t)$ равна



$$S_{O\theta C_1 C_0} = \sum_i C(t_i)\Delta t_i,$$

где i – определяет номер участка разбиения. С другой стороны, полученное количество теплоты

$$Q_{пол.} = \sum_i C(t_i)\Delta t_i m_0 = m_0 \sum_i C(t_i)\Delta t_i .$$

Таким образом,

$$Q_{пол.} = m_0 S_{O\theta C_1 C_0}.$$

Площадь $S_{O\theta C_1 C_2}$ найдем как площадь трапеции

$$S_{O\theta C_1 C_2} = \frac{C_0 + C_1}{2}\cdot\theta = \frac{C_0 + C_0(1+\alpha\theta)}{2}\theta = C_0\theta + \frac{\alpha C_0 \theta^2}{2}$$

и, следовательно,

$$Q_{пол.} = m_0 C_0\left(\theta + \frac{\alpha\theta^2}{2}\right). \qquad (2)$$

Приравнивая (1) и (2), получаем квадратное уравнение относительно θ.

$$m_0 C_0 \frac{\alpha}{2}\theta^2 + m_0 C_0 \theta = m_1 C_1 t_1 - m_1 C_1 \theta .$$

В приведенном виде

$$\theta^2 + \frac{2(m_0 C_0 + m_1 C_1)}{\alpha m_0 C_0} - \frac{2 m_1 C_1 t_1}{\alpha m_0 C_0} = 0.$$

Это уравнение в числах

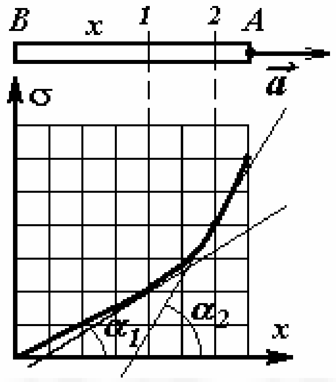
$$\theta^2 + 436\,\theta - 12115 = 0$$

имеет один из корней

$$\theta \approx 26\ {}^oC.$$

Второй корень физического смысла не имеет, он появился как следствие неоправданного использования формулы (2) в области $\theta < 0$.

10-1. Пусть зависимость силы натяжения в стержне от расстояния $T(x)$. Тогда $T(x) = \sigma(x)\cdot S,$, где S – площадь поперечного сечения стержня. Рассмотрим движение малого участка стержня длиной Δx_i; согласно основному закону динамики имеем:



$$\rho_i S \Delta x_i a = T(x + \Delta x) - T(x) = \Delta T(x) = \Delta\sigma(x)\cdot S$$

Отсюда:

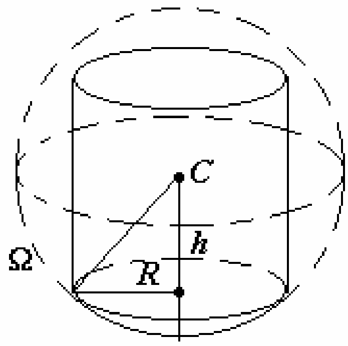
$$a = const = \frac{\Delta\sigma(x)}{\Delta x_i}\frac{1}{\rho_i} = \frac{tg\alpha_i}{\rho_i},$$

где $tg\alpha_i$ – тангенс угла наклона касательной к графику в соответствующей точке. Тогда:

$$\frac{tg\alpha_1}{\rho_1} = \frac{tg\alpha_2}{\rho_2} \Rightarrow \rho_2 = \rho_1\frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1} = 3{,}0\frac{tg37^o}{tg56^o} = 5{,}9 г / см^3 .$$

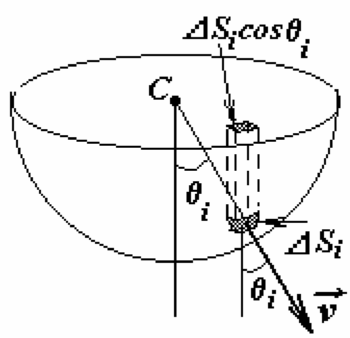
α_1 и α_2 – углы наклона касательных к графику в сечениях 1 и 2.

10-2. Подсчитаем импульс осколков, ушедших в землю – такой же по величине и противоположный по направлению импульс получит и бочка.



Проведем сферу Ω с центром в точке взрыва C, опирающуюся на основание цилиндра. Пусть число осколков на единицу площади сферы n. Тогда:

$$p = \sum_i n\Delta S_i m_0 v \cos\theta_i, \qquad (1)$$



где m_0 – масса одного осколка, v – его скорость, ΔS_i – площадь небольшого участка сферы, θ_i – соответствующий угол между осью бочки и $\vec{p}_i$. Но $\Delta S_i \cos\theta_i$ – величина проекции площади сегмента сферы на основание бочки, тогда сумму (1) легко вычислить:

$$p = nm_0 v \sum_i \Delta S_i \cos\theta_i = nm_0 v \pi R^2. \qquad (2)$$

Далее: $n = \dfrac{N}{4\pi\left(R^2 + h^2\right)}$,

$$Nm_0 = m \Rightarrow \frac{Nm_0 v^2}{2} = E,\ v = \sqrt{\frac{2E}{m}},$$

и (2) принимает вид:

$$p = \frac{N}{4\pi\left(R^2 + h^2\right)} m_0 \sqrt{\frac{2E}{m}} \pi R^2 = MV,$$

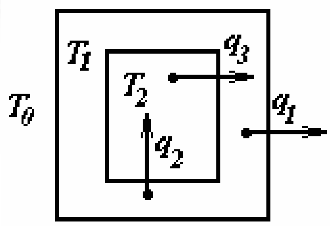
где V – скорость бочки после взрыва. Зная начальную скорость бочки, легко найти высоту ее подъема:

$$H = \frac{V^2}{2g} = \frac{p^2}{2M^2 g} = \frac{Em}{16M^2\left(1 + \dfrac{h^2}{R^2}\right)^2 g}.$$

Заметим, что при решении мы не учитывали изменения импульсов осколков за время полета в поле силы тяжести ($mg\tau << mv$) и приняли, что все осколки достигают поверхности бочки одновременно. Кроме того, неявно предполагается, что $m << M$.

10-3. Для решения задачи сделаем следующие предположения:
поток теплоты из комнаты на улицу:

$$\frac{Q_1}{t} = q_1 = k_1\left(T_1 - T_0\right) \qquad (1)$$

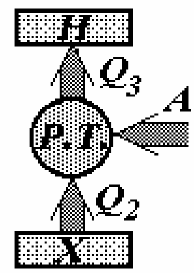


из комнаты в морозилку:

$$\frac{Q_2}{t} = q_2 = k_2\left(T_1 - T_2\right) \qquad (2)$$

пропорциональны соответствующим разностям температур.

При установлении теплового равновесия поток теплоты q_2 должен «отсасываться» из морозилки. С учетом связей между Q_2 и Q_3 для идеальной тепловой машины, имеем (она работает по обратному циклу)



$$\begin{cases} Q_3 = Q_2 + A \\ \dfrac{Q_3 - Q_2}{Q_3} = \dfrac{T_1 - T_2}{T_2} \Rightarrow Q_3 = Q_2 \dfrac{T_1}{T_2} \Rightarrow q_3 = q_2 \dfrac{T_1}{T_2}. \end{cases}$$

(3)

В установившемся режиме:

$$q_3 = q_1 + q_2. \qquad (4)$$

Из (1) – (4) имеем:

$$k_2 \left(T_1 - T_2 \right)^2 = k_1 T_2 \left(T_1 - T_0 \right). \qquad (5)$$

В случае работы двух холодильников:

$$2k_2 \left(T_1^* - T_2 \right)^2 = k_1 T_2 \left(T_1^* - T_0 \right). \qquad (6)$$

Решая систему (5) – (6) получаем квадратное уравнение для искомой температуры

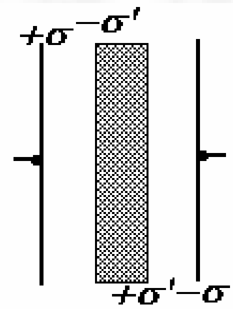
$$\left(T_1^* \right)^2 - 618 T_1^* + 94354 = 0$$

$T_1^* = 342{,}5\,K$ или $T_1^* = 275{,}4\,K$.

Первый корень отбросим как несоответствующий здравому смыслу. Итак, в случае работы двух холодильников:

$$T_1^* = 275{,}4\,K.$$

10-4. Пусть поверхностная плотность заряда на обкладках конденсатора равна σ. Тогда на поверхности диэлектрика:



$$\sigma' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma. \qquad (1)$$

Эту формулу легко получить, если учесть, что суммарное электрическое поле, создаваемое зарядами на обкладках и поляризационными зарядами, в ε раз меньше поля, создаваемого только свободными зарядами на обкладках, иными словами $(\sigma + \sigma') = \sigma / \varepsilon$.

Тогда сила, действующая на единицу площади диэлектрика:

$$P = \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} \right) \sigma' = \frac{\varepsilon^2 - 1}{2\varepsilon^2 \varepsilon_0} \sigma^2. \qquad (2)$$

Если предел прочности материала диэлектрика $P_{np.}$, то он будет разорван кулоновскими силами при поверхностной плотности:

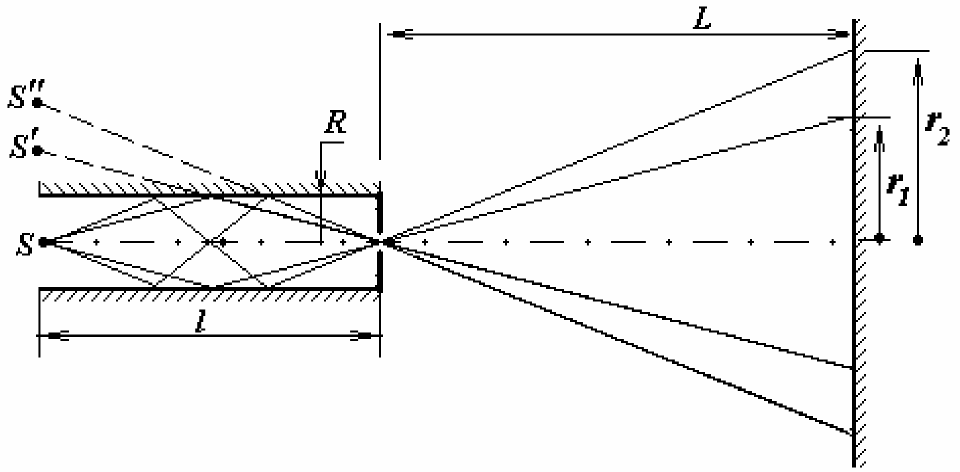
$$\sigma = \sqrt{\frac{2\varepsilon^2 \varepsilon_0}{\varepsilon^2 - 1} P_{np}}. \qquad (3)$$

Тогда искомое напряжение:

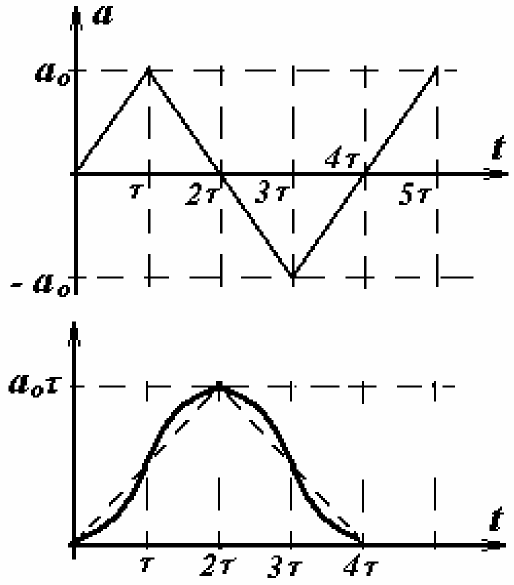
$$U = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(D - d + \frac{d}{\varepsilon}\right) = \frac{D - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}d}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{2\varepsilon^2 \varepsilon_0}{\varepsilon^2 - 1} P_{np}} = \left(D\varepsilon - (\varepsilon - 1)d\right)\sqrt{\frac{2P_{np}}{\varepsilon_0\left(\varepsilon^2 - 1\right)}}.$$

10-5. Образование ярких колец (легко наблюдаемых даже в обыкновенной ручке) объясняется отражением световых лучей от внутренней зеркальной поверхности. (Центральное пятнышко образуется без отражений). Одному отражению соответствует первое кольцо, двум – вторая и т.д. Из подобия треугольников:

$$r_k = \frac{L}{l} 2Rk, \quad k \in N.$$



11-1. Площадь под графиком зависимости $a(t)$ численно равна изменению скорости. Учитывая, что при $t = 0, v = 0,$ заметим, что скорость максимальна при $t = 2\tau$ $\left(v_{max} = a_0\tau\right)$ и уменьшается до $v = 0$ при $t = 4\tau$ (т.е. точка 4τ в тех же условиях, что и $\tau = 0$). Следовательно, достаточно вычислить $v_{ср}$ за время 4τ. Построив зависимость $v(t)$ (четыре участка параболы), видим, что площадь под кривой $v(t)$ численно равна $S = \frac{1}{2}4\tau a_0\tau = 2a_0\tau^2$ (можно легко подсчитать как площадь треугольника, обозначенного пунктиром).



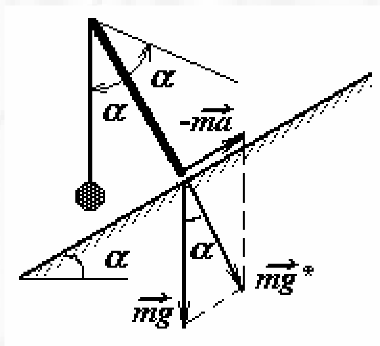
Итого:

$$v_{ср} = \frac{S}{4\tau} = \frac{a_0\tau}{2}.$$

11-2. Санки движутся с постоянным ускорением

$$a = g\sin\alpha,$$

направленным вниз вдоль наклонной плоскости.



Рассмотрим движение маятника в неинерциальной системе отсчета, связанной с санками. В этой СО на груз действует сила инерции $F_{ин} = mg\sin\alpha$, направленная вдоль наклонной плоскости. Сумма силы тяжести mg и силы инерции постоянна и направлена перпендикулярно наклонной плоскости . Таким образом, можно говорить о движении маятника в эффективном поле с «ускорением свободного падения» $g_{эф} = g\cos\alpha$ и направленном перпендикулярно наклонной плоскости. Следовательно, положение равновесия маятника (в этой СО) – перпендикулярное наклонной плоскости.

Начальное отклонение от него (т.е. амплитуда) $\alpha_0 = \alpha$. Период колебаний можно найти по известной формуле

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_{эф}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\alpha}}.$$

11-3. На поршни действуют:

а) сила давления газа, которое можно вычислить по заказу Бойля-Мариотта

$$P = \frac{P_0 V_0}{V} = P_0 \frac{d_0}{d}, \qquad (1)$$

«направленная наружу».

б) сила электрического «давления» (с учетом $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$)

$$P_{эл} = \sigma E' = \frac{\sigma E}{2} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 U^2}{2d^2}, \qquad (2)$$

направленная «внутрь».

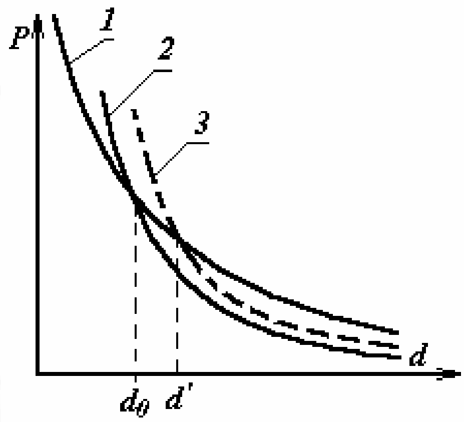
В положении равновесия $P = P_{эл}$ или $P_0 \dfrac{d_0}{d} = \dfrac{\varepsilon_0 U^2}{2d^2}$, откуда следует

$$\frac{U^2}{d} = const = \frac{U_0^2}{d_0},$$

т.е.

$$d = d_0 \frac{U^2}{U_0^2}.$$

Из соотношения следует, что при увеличении напряжения в два раза, расстояние между поршнями должно увеличиться (?!) в четыре раза, что явно противоречит здравому смыслу.



Разрешение парадокса заключается в том, что в данной системе положение равновесия не является устойчивым. На рисунке изображены зависимости давления газа (кривая 1, формула (1)) и давления электрического поля (кривая 2, формула(2)) от расстояния d между поршнями. Точка их пересечения соответствует положению равновесия d_0. При случайном отклонении поршней от этого положения возникает сила, еще дальше уводящая их от этого положения. Если расстояние случайно стало меньше d_0, то сила электрического притяжения начинает превышать силу давления газа. При увеличении напряжения положение равновесия смещается в сторону больших значений d (на рисунке кривая 3 соответствует большему напряжению, точка d' - новое положение равновесия - и тоже неустойчивое), однако, поршни не стремятся к этому новому положению равновесия, а, наоборот уходят от него.

Таким образом, ответ задачи: поршни «схлопнутся», т.е. d=0! Более подробное доказательство неустойчивости положения равновесия приведено в журнале «Фокус» №3 за 1995год.

11-4. Найдем скорость, которую приобретет каждая перемычка в ходе быстрого включения поля.
При изменении магнитного поля возникает эдс индукции

$$E_{инд} = al_0 \frac{\Delta B}{\Delta t},$$

где a – расстояние между рельсами, l_0 – начальное расстояние между перемычками. (Так как поле изменяется быстро, что смещением перемычек за время «включения» пренебрегаем.)
В контуре возникнет электрический ток силой

$$I = \frac{E_{ind}}{R} = \frac{al_0}{R}\frac{\Delta B}{\Delta t},$$

(R – общее сопротивление перемычек).
Сила, действующая на перемычку (внутрь)

$$F = IBa = \frac{a^2 l_0}{R} B \frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Импульс, приобретенный перемычкой

$$mv = \sum F\Delta t = \frac{a^2 l_0}{R}\sum B\Delta B = \frac{a^2 l_0}{R}\frac{B_0^2}{2},$$

где B_0 – индукция включенного поля.

Отсюда скорость, которую преобретут перемычки равна $v_0 = \frac{a^2 l_0}{2Rm} B_0^2$.
Дальше перемычки движутся в постоянном поле B_0. При этом в контуре также возникает эдс индукции

$$E_{инд} = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = B_0 a \frac{\Delta l}{\Delta t} = 2B_0 av,$$

v – текущее значение скорости. (коэффициент 2 появился из-за того, что движутся две перемычки.)
Тормозящая сила , действующая на одну из перемычек равна

$$F = IBa = \frac{E_{ind}}{R} B_0 a = 2\frac{B_0^2 a^2}{R} v.$$

Запишем уравнение второго закона Ньютона:

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = -2\frac{B_0^2 a^2}{R} v,$$

учитывая, что $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, получим

$$m\frac{\Delta v}{\Delta x} = -2\frac{B_0^2 a^2}{R},$$

т.е. до остановки каждая перемычка пройдет расстояние

$$x_1 = \frac{mv_0 R}{2B_0^2 a^2} = \frac{mR}{2B_0^2 a^2}\frac{B_0^2 a^2 l_0}{2Rm} = \frac{l_0}{4}.$$

Окончательно, расстояние между перемычками уменьшится на $2x_1 = \frac{l_0}{2}$, т.е. уменьшится в два раза. Интересно отметить, что результат не зависит от параметров задачи.

11-5. Давление газа найдем с помощью уравнения состояния

$$P_0 = nkT = \frac{N}{\pi r^2 l}kT,$$

где N – число молекул, l – длина трубки.
Давление света может быть оценено, как суммарный импульс фотонов, попадающих на единичную площадку стенки трубки в единицу времени

$$P_c = \frac{1}{2}P_0 \nu,$$

где $P_0 = \frac{h}{\lambda}$ – импульс фотона; ν – число фотонов, падающих на единицу площади внутренней поверхности в единицу времени

$$\nu = \frac{N}{\tau}\frac{1}{2\pi rl},$$

$\frac{N}{\tau}$ – число фотонов, испущенных газом в единицу времени. Множитель $1/2$ учитывает тот факт, что фотоны падают под произвольными углами.
Итого отношение давлений

$$\eta = \frac{P_c}{P_0} = \frac{1}{2}\frac{h}{\lambda}\frac{N}{\tau}\frac{1}{2\pi rl}\frac{\pi r^2 l}{NkT} = \frac{hr}{4\lambda\tau kT} \approx 5\cdot 10^{-7}.$$