

Условие

11-3. Внутри открытой горизонтальной цилиндрической трубки находятся два легкоподвижных плотно пригнанных металлических поршня, между которыми находится идеальный газ. Поршни подключены к регулируемому источнику постоянного напряжения. Напряжение источника равно U_0 , поршни находятся в равновесии на расстоянии d_0 друг от друга. Как изменится расстояние между поршнями, если медленно увеличить напряжение источника в два раза? Атмосферным давлением пренебречь, температуру газа считать постоянной, его диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 1$.

Решение

11-3. На поршни действуют: а) сила давления газа, которое можно вычислить по закону Бойля-Мариотта

$$P = \frac{P_0 V_0}{V} = P_0 \frac{d_0}{d}, \quad (1)$$

«направленная наружу». б) сила электрического «давления» (с учетом $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$)

$$P_{\text{эл}} = \sigma E' = \frac{\sigma E}{2} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 U^2}{2d^2}, \quad (2)$$

направленная «внутрь». В положении равновесия $P = P_{\text{эл}}$ или $P_0 \frac{d_0}{d} = \frac{\varepsilon_0 U^2}{2d^2}$, откуда следует

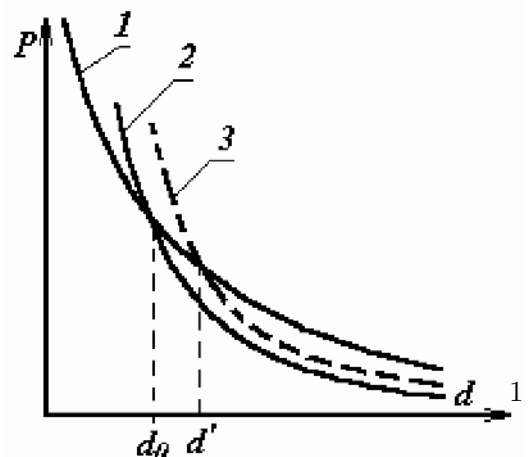
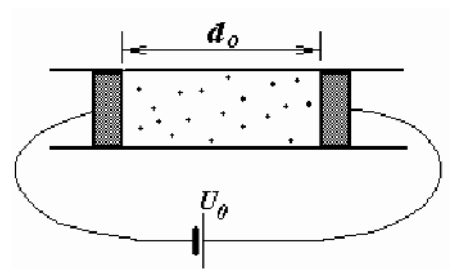
$$\frac{U^2}{d} = \text{const} = \frac{U_0^2}{d_0},$$

т.е.

$$d = d_0 \frac{U^2}{U_0^2}.$$

Из соотношения следует, что при увеличении напряжения в два раза, расстояние между поршнями должно увеличиться (!) в четыре раза, что явно противоречит здравому смыслу.

Разрешение парадокса заключается в том, что в данной системе положение равновесия не является устойчивым. На рисунке изображены зависимости давления газа (кривая 1, формула (1)) и давления электрического поля (кривая 2, формула (2)) от расстояния d между поршнями. Точка их пересечения соответствует положению равновесия d_0 . При случайном отклонении поршней от этого положения возникает сила, еще дальше уводящая их от этого положения. Если расстояние



случайно стало меньше d_0 , то сила электрического притяжения начинает превышать силу давления газа. При увеличении напряжения положение равновесия смещается в сторону больших значений d (на рисунке кривая 3 соответствует большему напряжению, точка d' - новое положение равновесия - и тоже неустойчивое), однако, поршни не стремятся к этому новому положению равновесия, а, наоборот уходят от него.

Таким образом, ответ задачи: поршни «схлопнутся», т.е. $d = 0$! Более подробное доказательство неустойчивости положения равновесия приведено в журнале «Фокус» №3 за 1995год.