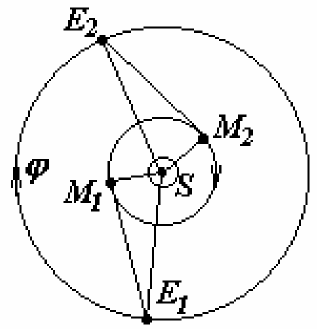
Барановичи 1994 г. (Решения)

9-1. Так как Меркурий планета, ближайшая к Солнцу, то ее наблюдению с земли мешает солнечный свет. Меркурий может быть виден либо утром, перед восходом Солнца, либо вечером, сразу после заката. Оптимальные условия наблюдения Меркурия реализуются когда он находится на максимальном угловом удалении от Солнца, т.е. когда угол между направлениями на планету и на Солнце с Землей максимален. Пусть 1 января Земля находится в точке E_1. Тогда Меркурий находится в точке M_1, такой, что прямая $E_1 M_1$ является касательной к орбите Меркурия. К 25 апреля (т.е. через время $\tau = 115$ *суток* – учтите, что 1980 год – високосный) Земля сместится в точку M_2, повернувшись вокруг Солнца на угол φ, причем



$$\varphi = \frac{2\pi}{T_0}\tau, \qquad (1)$$

где $T_0 = 365$ *суток* – период обращения Земли вокруг Солнца. За этот же промежуток времени Меркурий сместится в точку M_2, сделав еще один полный оборот вокруг Солнца, т.е. угол поворота Меркурия вокруг Солнца равен $2\pi + \varphi$, следовательно,

$$2\pi + \varphi = \frac{2\pi}{T}\tau, \qquad (2)$$

где T – искомый период обращения Меркурия. Из уравнений (1) – (2) можно найти

$$T = \frac{\tau T_0}{\tau + T_0} \approx 87{,}5 \ \text{суток}.$$

Отметим, что из (1) – (2) можно получить известное в астрономии соотношение между сидерическим (истинным) T и синодическим (наблюдаемым) τ периодом обращения

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{T_0}.$$

9-2. Так как резистор и лампа включены в цепь последовательно, то сумма падений напряжения на лампе U и резисторе $U_R = IR$ равна напряжению источника U_0:

$$U_0 = U + IR.$$

Кроме того, сила тока одинакова во всех элементах цепи, поэтому ток $I = \beta U^2$ (по условию) будет течь и через резистор. Таким образом, получили уравнение относительно напряжения U на лампе

$$U_0 = U + \beta R U^2,$$

которое имеет два корня

$$U = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\beta RU}}{2\beta R}.$$

Отрицательный корень следует отбросить, так как газоразрядная лампа не может служить источником напряжения. Окончательно получим значение силы тока

$$I = \beta U^2 = \frac{\left(\sqrt{1 + 4\beta RU_0} - 1\right)^2}{4\beta R^2}.$$

9-3. Во второй калориметр Федя залил кипящую воду, т.е. ее температура $t_2 = 100^o C$. Так как при измерении термометр показал температуру $t_1 = 99{,}2^o C$, то следует утверждать, что сам термометр имеет теплоемкость C_T, пренебречь который нельзя. Запишем уравнение теплового баланса для первого измерения: вода отдала термометру количество теплоты $Q = cm(t_2 - t_1)$ (где c — удельная теплоемкость воды, m — ее масса), столько же получил термометр $Q = C_T(t_1 - t_k)$, поэтому

$$cm(t_2 - t_1) = C_T(t_1 - t_k). \qquad (1)$$

Обозначим t_k — температура, которая установится в первом калориметре, после опускания в него горячего термометра. Рассуждая аналогично, можно записать уравнение теплового баланса во втором случае

$$cm(t_x - t_k) = C_T(t_1 - t_x). \qquad (2)$$

Решая совместно (1) — (2) получим

$$t_k = \frac{t_1(t_2 - t_1) + t_k(t_1 - t_k)}{t_2 - t_k} \approx 21{,}1^0 C.$$

9-4. Капли, падающие на лобовое стекло автомобиля, имеют нулевую горизонтальную составляющую скорости, а затем приобретают скорость V, равную скорости автомобиля. Следовательно, автомобиль сообщает каплям некоторый импульс, т.е. действует на них с некоторой силой, равной (по третьему закону Ньютона) силе, с которой капли действуют на автомобиль. Пусть масса воды, капавшей на лобовое стекло за время t, равна m; тогда импульс, сообщенный ей равен $p = mV$, а средняя сила, действующая на стекло,

$$F = \frac{p}{t} = \frac{mV}{t}, \qquad (1)$$

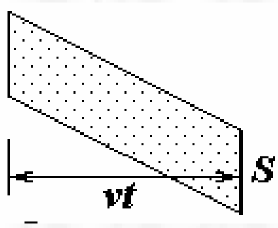
тогда давление водяных капель

$$P = \frac{mV}{tS}, \qquad (2)$$

где S — площадь стекла.

Для вычисления m, заметим, что за время t стекло “соберет” все капли, которые находятся в объеме параллелепипеда с основанием S и длиной Vt, т.е.

$$m = \lambda SVt, \qquad (3)$$



где λ — масса всех капель дождя, находящихся в единице объема. Для определения λ можно рассуждать следующим образом: пусть за время τ в цилиндрическом вертикальном сосуде с площадью основания S_0 уровень воды поднялся на $h\tau$, тогда ее масса $m_0 \rho h\tau S_0$, где $m_0 = \rho h\tau S_0$, ρ — плотность воды, очевидно, что эта же масса может быть выражена через λ по формуле аналогичной (3)

$$m_0 = 2S_0 U\tau,$$

Приравнивая

$$\rho h\tau S_0 = \lambda S_0 \tau U,$$

найдем

$$\lambda = \frac{\rho h}{U} \qquad (4)$$

(отметим, что h — должно измеряться в той же системе единиц, что и остальные параметры задачи). Подставляя (4) в (3), а затем в (2), получим ответ

$$P = \frac{\rho h}{U} V^2.$$

10-1. Воспользуемся законом Ома в дифференциальной форме и запишем плотность тока у поверхности шарика

$$j = \frac{E}{\rho}, \qquad (1)$$

где $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ — напряженность электрического поля у поверхности шарика, q — его заряд, R — радиус.

Сила тока, стекающего с шарика,

$$I = j \cdot S = \frac{q}{\varepsilon_0 \rho},$$

где $S = 4\pi R^2$ – площадь поверхности шарика.

Сила тока — есть скорость изменения заряда шарика $\frac{\Delta q}{\Delta t}$. Как следует из (2), сила тока не является постоянной, а зависит от заряда шарика. Однако, для получения оценки времени исчезновения заряда, можно положить ее постоянной и равной $I_0 = \frac{q_0}{\varepsilon_0 \rho}$, где q_0 — начальный заряд шарика. Тогда время разряда оценивается по формуле

$$\tau = \frac{q_0}{I_0} = \varepsilon_0 \rho.$$

Отметим, что эта оценка впервые получена Дж.К.Максвеллом и носит название максвелловское время релаксации. Можно показать, что за это время заряд уменьшается в $e = 2.71828\ldots$ раз.

10-2. При движении вагона внутри туннеля сила тяжести вагона будет изменяться при изменении расстояния до центра Земли. Найдем ускорение свободного падения g в точке, находящейся на расстоянии r до центра Земли. Слои, находящиеся на большем расстоянии от центра не будут вносить вклад в величину силы тяжести. Поэтому по закону всемирного тяготения

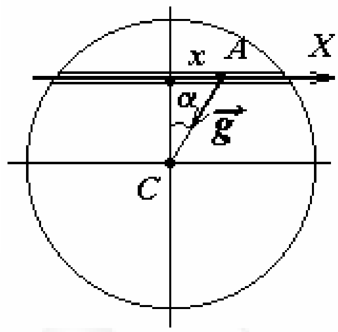
$$mg = G\frac{m}{r^2}\frac{4}{3}\pi\rho r^3 = \frac{4\pi}{3}Gmr\rho, \qquad (1)$$

где ρ — средняя плотность Земли, G — гравитационная постоянная. Учитывая, что на поверхности Земли ускорение свободного падения равно $g_0 = 9{,}8 м/с^2$, из (1) можно записать

$$g = g_0 \frac{r}{R}, \qquad (2)$$

где R — радиус Земли.

Пусть ось X направлена вдоль туннеля, начало отсчета совместим с его центром. Тогда в точке А, находящейся на расстоянии $r = |AC|$ от центра Земли, ускорение вагона может быть найдено из второго закона Ньютона



$$ma = -mg\sin\alpha, \qquad (3)$$

учитывая (1), получим

$$a = -g_0 \frac{r}{R}\sin\alpha = -\frac{g_0}{R}x, \qquad (4)$$

где $x = r\sin\alpha$ координата точки A. (4) есть уравнение гармонических колебаний, с круговой частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{g_0}{R}},$$

Время движения в одну сторону τ равно половине периода колебаний, т.е.

$$\tau = \frac{T}{2} = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{R}{g_0}} \approx 2540c \approx 40мин. \qquad (5)$$

Интересно заметить, что это время остается одним и тем же для любых точек, находящихся на поверхности Земли и соединенных прямым туннелем.

10-3. Так как площадь поперечного сечения трубы S постоянна, то объем воздуха под поршнем пропорционален длине воздушного столба x, давление пропорционально расстоянию до поверхности воды. Считая процесс расширения изотермическим, из закона Бойля-Мариотта можно записать

$$\rho ghSx_0 = \rho g(h - x)Sx, \qquad (1)$$

где ρgh — давление воздуха при горизонтальном положении трубы, $\rho g(h - x)$ — давление воды на поршень, когда труба поднята вертикально. Уравнение (1) перепишем в виде

$$x^2 - hx + hx_0 = 0. \qquad (2)$$

Его корни

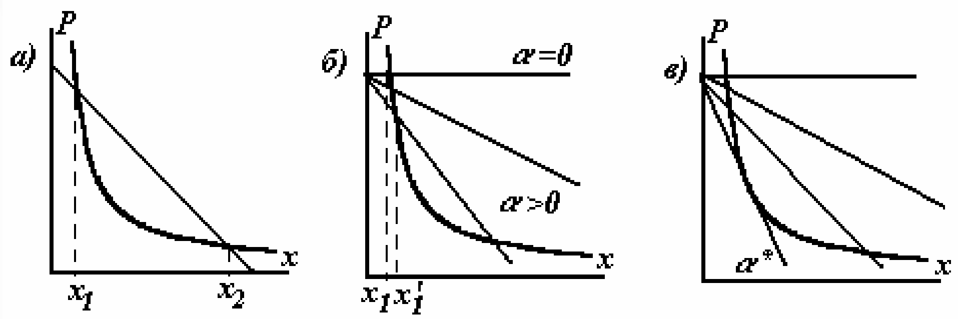
$$x_{1,2} = \frac{h}{2} \pm \sqrt{\frac{h^2}{4} - hx_0}. \qquad (3)$$

Подстановка численных значений приводит к результату $x_1 = 10м$, $x_2 = 90м$.

Второй корень $x_2 > l,$ где l — длина трубы. Однако отбросить его по этой причине нельзя: его можно интерпретировать таким образом, что поршень выскочит из трубы.

Тем не менее при медленном поднятии трубы поршень будет медленно смещаться от положения x_0 до положения $x_1 = 10м$, не достигая второго положения равновесия $x_2 = 90м$.

Для более убедительного анализа построим графики зависимостей давления воздуха в трубе $\left(p_1 = \frac{h_0 x_0}{x}\right)$ и гидростатического давления воды $\left(p_2 = h - x\right)$ в зависимости от x при вертикальном положении трубы (здесь p_1 и p_2 измеряются в метрах водяного столба (рис.а)).



Положениям равновесия соответствует условие $p_1 = p_2$. Легко показать, что точка x_1 — есть точка устойчивого, а x_2- неустойчивого равновесия. Следовательно, при смещении положения равновесия x_1 при подъеме трубы поршень будет все время стремится за этим положением равновесия. Действительно, пусть труба образует угол α с горизонтом, в этом случае гидростатическое давление $p_2 = h - x \sin\alpha.$ Изобразим эти зависимости при разных α (рис.б). Видно, что положение устойчивого равновесия медленно и монотонно смещается от x_1 до x_1', поэтому поршень никак не сможет приблизиться ко второму положению равновесия x_2.

Интересно отметить, что при $x_0 > \frac{h}{4}$ уравнение (2) не имеет ни одного действительного корня – это значит, что в этом случае воздух обязательно вытолкнет поршень! Запишем условие равновесия поршня при произвольном угле наклона трубы α

$$\frac{hx_0}{x} = h - x\sin\alpha . \qquad (4)$$

Отсюда находим

$$x_1 = \frac{h - \sqrt{h^2 - 4hx_0 \sin\alpha}}{2\sin\alpha},$$

$$x_2 = \frac{h + \sqrt{h^2 - 4hx_0 \sin\alpha}}{2\sin\alpha}$$

При α стремящимся к нулю, корень x_1 стремится к x_0, а x_2 «убегает» на бесконечность. При возрастании α устойчивый корень x_1 возрастает, а неустойчивый x_2 уменьшается. При некотором α^* (таком, что $h^2 - 4hx_0 \sin\alpha^* = 0$) оба корня «сливаются» – поршень становится неустойчивым и вылетает из трубы (рис.в).

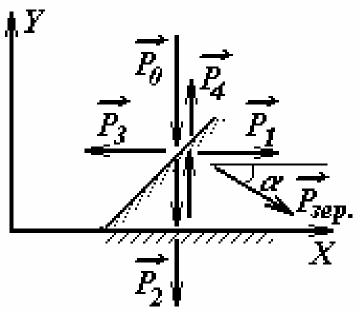
10-4. Импульс светового потока пропорционален числу фотонов (или интенсивности). Если коэффициент отражения равен ρ, то модуль импульса отраженного потока равен ρP_0, а модуль импульса прошедшего потока $(1-\rho)P_0$ (где P_0 – импульс падающего потока). Запишем модули импульсов всех потоков уходящих от зеркал

$$P_1 = \rho P_0$$

$$P_2 = (1-\rho)^2 P_0$$

$$P_3 = (1-\rho)\rho^2 P_0$$

$$P_4 = (1-\rho)^2 \rho P_0$$



Вычислим изменения проекций импульса света на выбранные оси

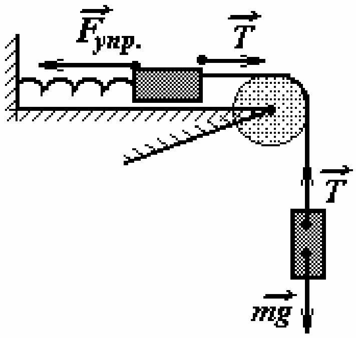
$$\begin{aligned} \Delta P_y &= P_4 - P_2 - (-P_0) = \left(1 - (1-\rho)^3\right)P_0 \\ \Delta P_x &= P_3 - P_1 = -\rho\big(1 - \rho(1-\rho)\big)P_0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Импульс, который получила система зеркал равен по модулю изменению импульса света и противоположен ему по направлению, поэтому

$$P_{x\,зер.} = -\Delta P_x; \;\; P_{y\,зер.} = -\Delta P_y .$$

Легко заметим, что $P_{x\,зер.} > 0,\ P_{y\,зер.} < 0,$ поэтому полученный импульс (а, следовательно, и действующая сила) направлен под углом α к оси X, для которого

$$tg\alpha = \frac{-P_{y\,зер.}}{P_{x\,зер.}} = \frac{1-(1-\rho)^3}{\rho(1-\rho(1-\rho))}.$$



10-5. Пусть грузы сместятся на расстояние x. На основании второго закона Ньютона можно записать

$$\begin{cases} ma = mg - T, \\ ma = -T - kx, \end{cases} \qquad (1)$$

где T – натяжение нити, $-kx$ – сила упругости пружины. Исключая из системы (1) величину T получим

$$a = \frac{g}{2} - \frac{k}{2m}x. \qquad (2)$$

Запишем также уравнение закона сохранения энергии

$$mgx = 2\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}. \qquad (3)$$

Из (3) найдем экстремальные смещения грузов (когда $v = 0$)

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = 2\frac{mg}{k}. \qquad (4)$$

Из уравнения (2) следует, что ускорения грузов линейно зависят от их смещения, следовательно, пределы изменения ускорения соответствуют предельным значениям x,

$$a_0 = \frac{g}{2}, \quad a_1 = -\frac{g}{2}. \qquad (5)$$

Скорость грузов максимальна, когда их ускорение равно нулю, т.е. при $x = \frac{mg}{k}$, из (3) находим

$$v_{max} = \sqrt{\frac{m}{2k}}g \qquad (6)$$

Укажем еще один способ решения. Уравнение (2) есть уравнение гармонических колебаний с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{2m}}.$$

Положению равновесия соответствует координата

$$x = \frac{mg}{k},$$

учитывая, что начальное положение есть $x = 0$, можно сказать, что амплитуда колебаний грузов

$$A = \frac{mg}{k}.$$

Тогда максимальная скорость

$$v_{max} = A\omega = \frac{mg}{k}\sqrt{\frac{k}{2m}} = g\sqrt{\frac{m}{2k}};$$

максимальное ускорение

$$a_{max} = A\omega^2 = \frac{mg}{k}\cdot\frac{k}{2m} = \frac{g}{2}.$$

11-1. Сила трения направлена в сторону противоположную направлению скорости движения тела относительно поверхности. Если бы ящик покоился, то суммарная сила трения, действующая на ящик была бы равна нулю (так как опоры колеблются в противофазе, то силы трения, действующие на них все время направлены в противоположные стороны). Когда ящик начинает двигаться, то в течении некоторого интервала времени опоры будут двигаться в одну сторону относительно наклонной плоскости. Пусть скорость первой опоры относительно ящика зависит от времени по закону

$$v'_1 = a\omega \sin \omega t,$$

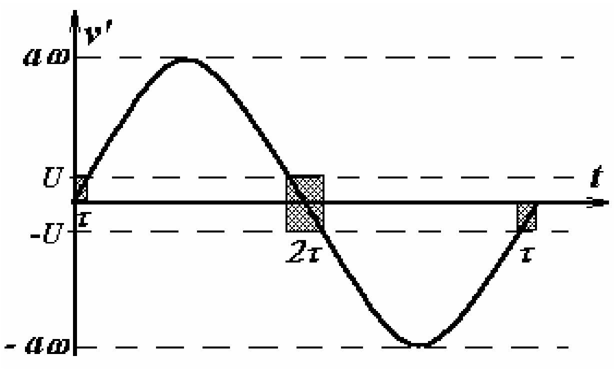
тогда скорость второй

$$v'_2 = -a\omega \sin \omega t.$$

Если скорость ящика равна U, то скорости платформ относительно наклонной плоскости равны

$$\begin{cases} v_1 = U + a\omega \sin \omega t, \\ v_2 = U - a\omega \sin \omega t. \end{cases}$$

Суммарная сила трения отлична от нуля, когда $v_1 > 0,\ v_2 > 0$ (при этом сила трения направлена вверх по наклонной плоскости). Заметим, что условия $v_1 < 0,\ v_2 < 0$ при неположительном U не выполняются никогда. Так как угол наклона плоскости α мал, то можно предположить, что средняя скорость движения ящика значительно меньше максимальной скорости движения опор $a\omega$ (справедливость этого предположения проверим позже). Итак, сила трения



отлична от нуля и равна при выполнении условий

$$\begin{cases} v_1 > 0 \\ v_2 > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} a\omega \sin\omega t > -U \\ a\omega \sin\omega t < U \end{cases}.$$

Изобразим график $v_1(t)$ и отметим те интервалы, в которых выполняется (4) (на рис. заштрихованы).

Так как U мало по сравнению с $a\omega$, то интервал τ также мал по сравнению с периодом колебаний. Поэтому можно считать $\sin\omega\tau \approx \omega\tau$, тогда из (4) получим $a\omega^2\tau = U$, откуда

$$\tau = \frac{U}{a\omega^2}.$$

За время одного периода колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, в течение интервала времени 4τ сила трения равна $\mu mg\cos\alpha$, а в остальные моменты она равна нулю. Следовательно, средняя сила трения

$$F_{ср.} = \mu mg\cos\alpha \frac{4\tau}{T} \approx \frac{2U}{\pi a\omega}\mu mg.$$

(здесь учтена малость α, тогда $\cos\alpha \approx 1$).
При установившемся движении эта сила равна проекции силы тяжести на наклонную плоскость :

$$mg\sin\alpha = \frac{2U}{\pi a\omega}\mu mg.$$

Откуда следует (с учетом $\sin\alpha \approx \alpha$)

$$U = \frac{\pi a\omega\sin\alpha}{2\mu} \approx \frac{\pi a\omega\alpha}{2\mu}.$$

Подстановка численных значений приводим к результату

$$U \approx 0{,}25 см/с.$$

Как и следовало ожидать $U << a\omega$, поэтому сделанное ранее приближения вполне обоснованы.

11-2. Пусть на торцах цилиндра индуцировались заряды $q' = \sigma S$, где S – площадь торца, σ – поверхностная плотность заряда. Так как цилиндр является проводником, то напряженность поля создаваемого индуцированными зарядами $E' = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ равна (и противоположно направлена) напряженности внешнего поля $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$.

Следовательно,

$$q' = \frac{qS}{4\pi a^2}.$$

Учитывая, что один заряд (на ближнем торце) находится на расстоянии a, а другой – на расстоянии $a+h$ (где $h << a$ высота цилиндра), найдем силу, действующую на цилиндр

$$F = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a+h)^2}\right) \approx \frac{q^2}{8\pi^2\varepsilon_0 a^5}Sh = \frac{q^2}{8\pi^2\varepsilon_0 a^5}V,$$

где $V = Sh-$ объем цилиндра. Здесь учтено, что $\frac{1}{1+\alpha} \approx 1-\alpha,$ если $\alpha << 1$. Отметим, что в однородном внешнем поле сила, действующая на незаряженный проводник равна нулю.

11-3. Рассмотрим взаимодействие фотона и свободного электрона в системе отсчета, в которой электрон до взаимодействия покоился. Обозначим импульс фотона до взаимодействия p_0. Допустим, электрон поглотил фотон, тогда импульс электрона после взаимодействия также равен p_0 (закон сохранения импульса). Запишем уравнение закона сохранения энергии: до взаимодействия – $E = m_0c^2 + p_0c$ (здесь m_0 – масса покоя электрона, p_0c – энергия фотона); после взаимодействия $E = \sqrt{m_0^2c^4 + p_0^2c^2}$. Таким образом:

$$m_0c^2 + p_0c = \sqrt{m_0^2c^4 + p_0^2c^2}. \qquad (1)$$

Это уравнение справедливо только при $p_0 = 0$, что равносильно отсутствию фотона. Итак, мы пришли к противоречию, которое доказывает, что фотон не может быть поглощен свободным электроном.

Интересно отметить, что сделанный вывод является следствием отсутствия внутренних степеней свободы у электрона. В классической физике невозможен абсолютный неупругий удар, при котором никакая часть энергии не переходит в тепловую (опять же отсутствуют внутренние степени свободы). Пусть частица массы m_1, движущаяся со скоростью v, сталкивается с покоящейся частицей массы m_2. Пусть после удара скорости частиц равны U. Запишем уравнения законов сохранения импульса и энергии

$$\begin{cases} m_1 v_1 = (m_1 + m_2)U, \\ \dfrac{m_1 v_1^2}{2} = \dfrac{(m_1 + m_2)U^2}{2} + Q, \end{cases} \qquad (2)$$

где Q – количество выделившейся при ударе теплоты. Если положить $Q = 0$, то система (2) имеет решения: первое – $v_1 = U = 0$, второе – $v_1 = U \neq 0$ при $m_2 = 0$. Ни одно из этих решений не описывает абсолютно неупругий удар. Следовательно, невозможен такой неупругий удар при котором $Q = 0$.

11-4. Чтобы препятствовать термическому расширению стального столбика необходимо прикладывать внешнюю нагрузку, которая, вследствие упругих деформаций, компенсирует термическое расширение. По закону Гука относительная упругая деформация определяется выражением

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\sigma}{E}, \qquad (1)$$

где σ – механическое напряжение, причем в данном случае $\sigma = \dfrac{mg}{S}$, где m – масса груза, лежащего на столбике. Приравнивая (1) к относительному термическому удлинению $\dfrac{\Delta l}{l} = \alpha\, \Delta T,$ получим

$$\frac{mg}{SE} = \alpha\, \Delta T,$$

откуда находим $m = \dfrac{SE\alpha\, \Delta T}{g} = 0{,}45 \cdot 10^4\, кг$.

11-5. Показатель преломления воды зависит от ее плотности, а, следовательно, от давления в жидкости. При подключении к кювете источника ультразвука в воде образуется стоячая звуковая волна, т.е. периодическая структура областей разряжения и сжатия. Эта структура играет роль дифракционной решетки, на которой происходит дифракция света. Период «решетки», очевидно, равен длине стоячей звуковой волны, которая равна половине длины бегущей волны $\lambda_{зв.}$

$$d = \frac{\lambda_{зв}}{2} = \frac{c}{2\nu}, \qquad (1)$$

где c – скорость звука в воде.

Условие максимума при дифракции на решетке имеет вид

$$d\,sin\,\varphi = m\lambda, \qquad (2)$$

где λ – длина световой волны, m – порядок дифракции, φ – угол дифракции. В данном случае угол мал, поэтому

$$sin\,\varphi \approx \varphi \approx \frac{a}{l}. \qquad (3)$$

Из (1) – (3) получим $\frac{c}{2\nu}\frac{a}{l} = \lambda.$

Откуда находим

$$c = \frac{2\lambda\nu l}{a} = \frac{2 \cdot 0,66 \cdot 10^{-6} \cdot 4,5 \cdot 10^{6} \cdot 9,0}{3,6 \cdot 10^{-2}} = 1490\,м\,/\,с\,.$$