

Условие

10-3. На дне озера на глубине $h = 100$ м горизонтально лежит тонкая прямая труба длиной $l = 80$ м. Один конец трубы плотно закрыт. Внутри трубы расположен легкий подвижный поршень. Между поршнем и закрытым концом трубы находится воздух, длина столба которого $x_0 = 9,0$ м. Трубу медленно подняли и установили вертикально открытым концом вверх. На какой высоте x от дна озера установится поршень? Атмосферным давлением пренебречь.

Решение

10-3. Так как площадь поперечного сечения трубы S постоянна, то объем воздуха под поршнем пропорционален длине воздушного столба x , давление пропорционально расстоянию до поверхности воды. Считая процесс расширения изотермическим, из закона Бойля-Мариотта можно записать

$$\rho g h S x_0 = \rho g (h - x) S x, \quad (1)$$

где $\rho g h$ — давление воздуха при горизонтальном положении трубы, $\rho g (h - x)$ — давление воды на поршень, когда труба поднята вертикально. Уравнение (1) перепишем в виде

$$x^2 - hx + hx_0 = 0. \quad (2)$$

Его корни

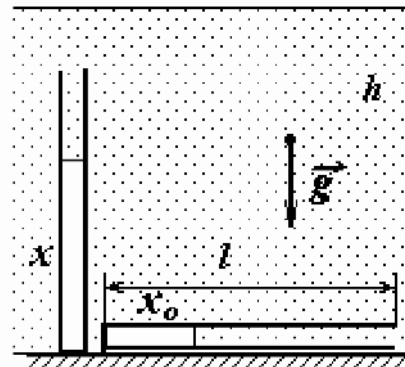
$$x_{1,2} = \frac{h}{2} \pm \sqrt{\frac{h^2}{4} - hx_0}. \quad (3)$$

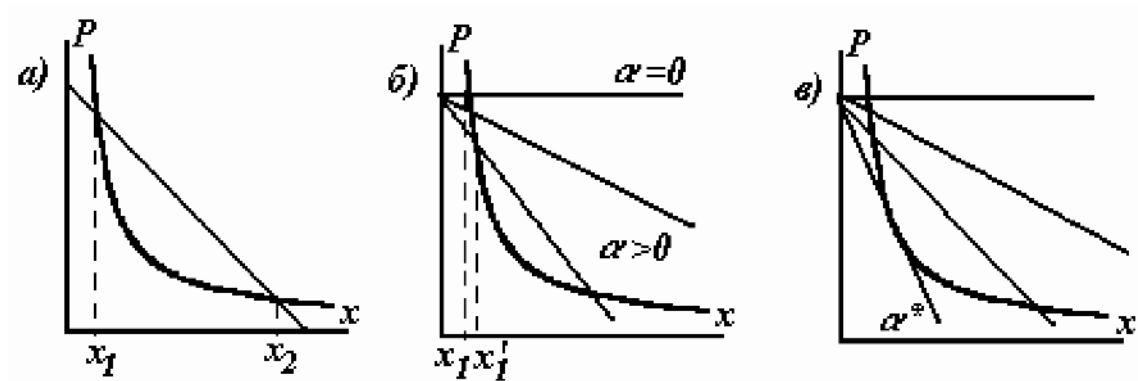
Подстановка численных значений приводит к результату $x_1 = 10$ м, $x_2 = 90$ м.

Второй корень $x_2 > l$, где l — длина трубы. Однако отбросить его по этой причине нельзя: его можно интерпретировать таким образом, что поршень выскочит из трубы.

Тем не менее при медленном поднятии трубы поршень будет медленно смещаться от положения x_0 до положения $x_1 = 10$ м, не достигая второго положения равновесия $x_2 = 90$ м.

Для более убедительного анализа построим графики зависимостей давления воздуха в трубе ($p_1 = \frac{h_0 x_0}{x}$) и гидростатического давления воды ($p_2 = h - x$) в зависимости от x при вертикальном положении трубы (здесь p_1 и p_2 измеряются в метрах водяного столба (рис.а)).





Положениям равновесия соответствует условие $p_1 = p_2$. Легко показать, что точка x_1 — есть точка устойчивого, а x_2 — неустойчивого равновесия. Следовательно, при смещении положения равновесия x_1 при подъеме трубы поршень будет все время стремиться за этим положением равновесия. Действительно, пусть труба образует угол α с горизонтом, в этом случае гидростатическое давление $p_2 = h - x \sin \alpha$. Изобразим эти зависимости при разных α (рис.б). Видно, что положение устойчивого равновесия медленно и монотонно смещается от x_1 до x_1' , поэтому поршень никак не сможет приблизиться ко второму положению равновесия x_2 .

Интересно отметить, что при $x_0 > \frac{h}{4}$ уравнение (2) не имеет ни одного действительного корня — это значит, что в этом случае воздух обязательно вытолкнет поршень! Запишем условие равновесия поршня при произвольном угле наклона трубы α

$$\frac{hx_0}{x} = h - x \sin \alpha. \quad (4)$$

Отсюда находим

$$x_1 = \frac{h - \sqrt{h^2 - 4hx_0 \sin \alpha}}{2 \sin \alpha},$$

$$x_2 = \frac{h + \sqrt{h^2 - 4hx_0 \sin \alpha}}{2 \sin \alpha}$$

При α стремящимся к нулю, корень x_1 стремится к x_0 , а x_2 «убегает» на бесконечность. При возрастании α устойчивый корень x_1 возрастает, а неустойчивый x_2 уменьшается. При некотором α^* (таком, что $h^2 - 4hx_0 \sin \alpha^* = 0$) оба корня «сливаются» — поршень становится неустойчивым и вылетает из трубы (рис.в).