

Условие

11-1. Небольшой шарик падает на дно высокого бака, заполненного вязкой жидкостью. Время падения равно t_0 . Найдите время падения этого шарика, если бак движется горизонтально с постоянным ускорением a . Силу вязкого трения считать пропорциональной квадрату скорости шарика.

Решение

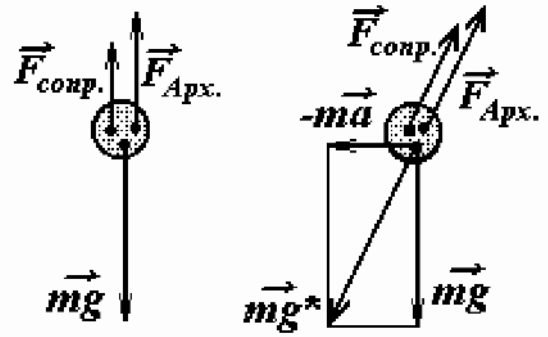
11-1. Так как сила сопротивления зависит от скорости, то по прошествии небольшого промежутка времени шарик будет двигаться равномерно.

При движении шарика в покоящемся баке скорость установившегося движения может быть найдена из уравнения

$$m\vec{g} + \vec{F}_{\text{арх}} + \vec{F}_{\text{сопр}} = \vec{0}.$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$(\rho - \rho_0)Vg = \beta v_0^2, \quad (1)$$



где ρ, ρ_0 — плотности шарика и жидкости соответственно, V — объем шарика, β — коэффициент пропорциональности между силой сопротивления и квадратом скорости.

Так как, по условию, бак высокий, можно пренебречь начальным участком движения, на котором скорость шарика изменяется, тогда $v_0 = \frac{h}{\tau_0}$, где h — высота бака. Подставим в (1)

$$(\rho - \rho_0)Vg = \beta \left(\frac{h}{\tau_0} \right)^2. \quad (2)$$

Падение шарика в ускоренно движущемся баке удобно рассматривать в неинерциальной системе отсчета, связанной с баком. В этом случае необходимо учесть силу инерции — $m\vec{a}$ действующую на шарик. (Отметим, что задачу можно решать и в инерциальной системе отсчета, связанной с поверхностью земли).

Можно воспользоваться уравнением (1), в котором следует заменить ускорение свободного падения $\vec{g}$ на эффективное $\vec{g}^* = \vec{g} - \vec{a}$. Шарик будет двигаться вдоль линии, по которой направлен вектор $\vec{g}^*$, и пройдет до дна путь

$$l = h \frac{g^*}{g} = h \frac{\sqrt{a^2 + g^2}}{g},$$

тогда уравнение аналогичное (2) имеет вид

$$(\rho - \rho_0)V\sqrt{a^2 + g^2} = \beta \left(\frac{gh}{\tau\sqrt{g^2 + a^2}} \right)^2. \quad (3)$$

Разделим почленно (2) на (3)

$$\frac{g}{\sqrt{a^2 + g^2}} = \frac{\tau^2}{\tau_0^2} \frac{g^2}{a^2 + g^2}.$$

Откуда

$$\tau = \tau_0 \left(1 + \frac{a^2}{g^2} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (4)$$