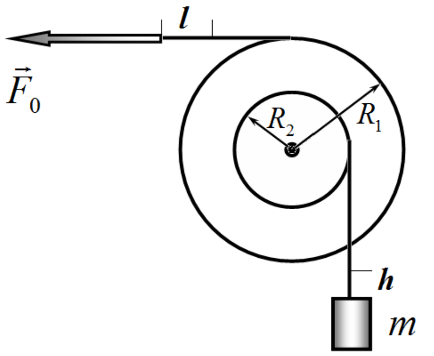
Задание 1. Простая задача про простые механизмы.

1.1 Ворот.

Если конец веревки, к которой приложена сила, сместить на расстояние l, то груз поднимется на высоту h, которую можно найти из условия равенства углов поворота:



$$\frac{l}{R_1} = \frac{h}{R_2}. \qquad (1)$$

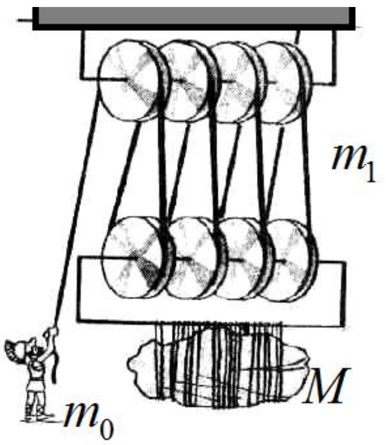
В соответствии с «золотым правилом» выполняется условие

$$F_0 l = mgh. \qquad (2)$$

Из этих выражений, следует, что масса поднимаемого груза равна

$$m = \frac{F_0}{g}\frac{R_1}{R_2}. \qquad (3)$$

1.2 Полиспаст.



Если человек опустит конец веревки на величину l, то груз поднимется на высоту $h = \frac{l}{8}$. Так как максимальная сила, которую может приложить человек, равна $m_0 g$, то максимальный груз, который можно поднять, находится из «золотого правила механики»:

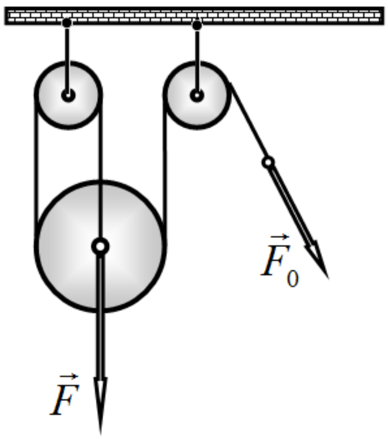
$$m_0 g l = \left(M + \frac{m_1}{2}\right) g h. \qquad (1)$$

Откуда следует, что

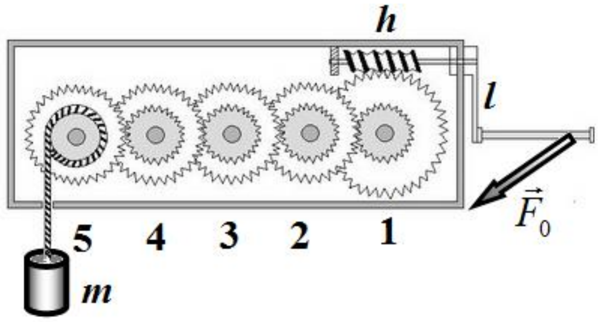
$$M = 8m_0 - \frac{m_1}{2}. \qquad (2)$$

1.3 Сделай сам.

Чтобы получить выигрыш в силе в три раза, подвижный блок необходимо подвесить на трех нитях. Например, так, как показано на рисунке.



1.4 Лебедка.



Допустим, рукоятку повернули на один оборот (при этом ее конец прошел расстояние равное $L = 2\pi l$), первая шестерня повернулась на угол $\varphi_1 = \dfrac{2\pi}{n_1}$. Вторая шестерня при этом повернется на угол в 2 раза меньший (так как на меньшей шестеренке в два раза меньше зубьев), угол поворота каждой следующей также будет в два раза меньше предыдущей. Следовательно, пятая шестерня повернется на угол $\varphi_5 = \dfrac{\varphi_1}{16}$, при этом груз поднимется на высоту

$$h = r\varphi_5 = r\frac{1}{16}\frac{2\pi}{n_1} \ . \tag{1}$$

Из «золотого правила механики» следует равенство

$$F_0 L = mgh \quad \Rightarrow \quad m = F_0\frac{L}{gh} = F_0\frac{2\pi l}{g\left(r\dfrac{1}{16}\dfrac{2\pi}{n_1}\right)} = 16 n_1 \frac{l}{r}\frac{F_0}{g} \ . \tag{2}$$

Задание 2. Системы единиц.

Часть 1. Система СИ.

1.1 Паскаль.

1.1.1 Размерность единицы давления выражается цепочкой формул

$$[p]=\frac{[F]}{[S]}=\frac{Н}{м^2}=\frac{кг\cdot м}{с^2\cdot м^2}=\frac{кг}{с^2\cdot м}. \tag{1}$$

1.1.2 По формуле для гидростатического давления $P=\rho gh$ получим:

$$1\text{"}дюйм\text{"}=13{,}5\cdot 10^3\,\frac{кг}{м^3}\cdot 2{,}54\cdot 10^{-2}\,м\cdot 9{,}81\,\frac{м}{с^2}=3{,}26\cdot 10^3\,Па \tag{2}$$

1.2 Джоуль

1.2.1 Единица энергии имеет размерность (из $A=Fl$)

$$Дж=Н\cdot м=\frac{кг\cdot м}{с^2}\cdot м=\frac{кг\cdot м^2}{с^2}. \tag{3}$$

1.2.2 Работа в поле тяжести рассчитывается по формуле

$$A=mgh \tag{4}$$

Следовательно

$$1\,ф\cdot ф=450\cdot 10^{-3}\,кг\cdot 9{,}81\,\frac{м}{с^2}\cdot 30{,}5\cdot 10^{-2}\,м=1{,}35\,Дж. \tag{5}$$

1.3 Ом

1.3.1 С помощью закона Ома и определения электрических величин получим

$$I=\frac{U}{R}\quad\Rightarrow\quad R=\frac{U}{I}=\frac{A}{It}\cdot\frac{1}{I}. \tag{6}$$

Поэтому размерность единицы сопротивления выражается через основные единицы СИ следующим образом

$$Ом=\frac{Дж}{А^2\cdot с}=\frac{кг\cdot м^2}{с^2\cdot А^2\cdot с}=\frac{кг\cdot м^2}{с^3\cdot А^2}. \tag{7}$$

1.3.2 Из формулы для сопротивления проводника

$$R=\rho\frac{l}{S} \tag{8}$$

Следует, что единица сопротивления Г.С. Ома в единицах системы СИ равна

$$1\text{"}см\text{"}=0{,}0167\,\frac{Ом\cdot 10^{-6}\,м^2}{м}\,\frac{1\cdot 10^{-2}\,м}{10^{-6}\,м^2}=1{,}67\cdot 10^{-4}\,Ом. \tag{9}$$

Поэтому

$$1\,Ом=\frac{1}{1{,}67\cdot 10^{-4}}\text{"}см\text{"}=6{,}00\cdot 10^3\text{"}см\text{"}. \tag{10}$$

Вывод можно сформулировать следующим образом: один Ом равен 60 «медных метров».

Часть 2. Планковская система единиц.

Сначала определим размерности используемых фундаментальных констант.
Размерность скорости света очевидна:

$$[c]=\frac{м}{c}. \tag{11}$$

Размерность гравитационной постоянной следует из закона всемирного тяготения:

$$F=G\frac{m_1m_2}{R^2} \quad\Rightarrow\quad [G]=\frac{[F]\cdot[R^2]}{[m^2]}=\frac{кг\cdot м\cdot м^2}{c^2\cdot кг^2}=\frac{м^3}{c^2\cdot кг}. \tag{12}$$

Размерность постоянной Планка:

$$E=h\nu \quad\Rightarrow\quad [h]=\frac{[E]}{[\nu]}=Дж\cdot c=\frac{кг\cdot м^2}{c^2}\cdot c=\frac{кг\cdot м^2}{c}. \tag{13}$$

2.1 Запишем формулу для Планковской длины, используя неизвестные показатели степеней:

$$l_P=G^\alpha h^\beta c^\gamma \tag{14}$$

На основании которого получим уравнение размерностей:

$$м=\left(\frac{м^3}{c^2\cdot кг}\right)^\alpha\left(\frac{кг\cdot м^2}{c}\right)^\beta\left(\frac{м}{c}\right)^\gamma. \tag{15}$$

Приравнивая показатели степеней одинаковых единиц, получим систему уравнений для неизвестных показателей

$$\begin{aligned} м&: \quad 1=3\alpha+2\beta+\gamma\\ c&: \quad 0=-2\alpha-\beta-\gamma\\ кг&: \quad 0=-\alpha+\beta \end{aligned} \tag{16}$$

Решением этой системы являются числа:

$$\alpha=\frac{1}{2};\quad \beta=\frac{1}{2};\quad \gamma=-\frac{3}{2}. \tag{17}$$

Тогда формула для планковской длины имеет вид:

$$l_P=\sqrt{\frac{Gh}{c^3}}. \tag{18}$$

Подстановка значений дает:

$$l_P=\sqrt{\frac{Gh}{c^3}}=4{,}05\cdot 10^{-35}\,м. \tag{19}$$

2.2 Формулу для планковского времени проще всего получить из очевидного выражения:

$$t_P=\frac{l_P}{c}=\sqrt{\frac{Gh}{c^5}}. \tag{20}$$

Его численное значение

$$t_P=\sqrt{\frac{Gh}{c^5}}=1{,}35\cdot 10^{-43}\,c. \tag{21}$$

2.3 Для расчета планковской массы поступаем аналогично п. 2.1

$$m_P=G^\alpha h^\beta c^\gamma \tag{22}$$

$$\text{кг} = \left(\frac{\text{м}^3}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}}\right)^{\alpha} \left(\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}\right)^{\beta} \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^{\gamma}. \qquad (23)$$

$$\begin{aligned} &\text{м}: \quad 0 = 3\alpha + 2\beta + \gamma \\ &\text{с}: \quad 0 = -2\alpha - \beta - \gamma \\ &\text{кг}: \quad 1 = -\alpha + \beta \end{aligned} \qquad (24)$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}; \quad \beta = \frac{1}{2}; \quad \gamma = \frac{1}{2}. \qquad (25)$$

Окончательно, формула для планковской массы имеет вид:

$$m_P = \sqrt{\frac{hc}{G}}. \qquad (26)$$

Подстановка значений дает:

$$m_P = \sqrt{\frac{hc}{G}} = 5{,}46 \cdot 10^{-8}\,\text{кг}. \qquad (27)$$

Задание 3. Приключения Гулливера

1. Механика

Обозначим отношение

$$\lambda = \frac{l}{l_0}, \tag{1}$$

где l - рост либо лилипута (для него $\lambda = \frac{1}{n} = 0{,}10$), либо великана (для него $\lambda = 10$).

1.1 Масса тела пропорциональная его объему, поэтому

$$m = m_0\lambda^3 \tag{2}$$

Масса лилипута:

$$m = \frac{m_0}{n^3} = 80\,г. \tag{3}$$

Масса великана:

$$m = m_0 n^3 = 80\,Т. \tag{4}$$

1.2 Перевозка Гулливера.

При движении телеги сила тяги лошадей преодолевает силу трения. Поэтому в обычных условиях, когда одна обычная лошадь тянет телегу с одним Гулливером, справедливо уравнение:

$$F_0 = \frac{\mu}{R_0} m_0 g \tag{5}$$

Если сила, развиваемая обычной лошадью равна F_0, то сила «лилипутской» лошади равна $F_0\lambda^2$ (так как она пропорциональна площади поперечного сечения мышц). Поэтому для N лилипутских лошадей выполняется:

$$NF_0\lambda^2 = \frac{\mu}{\lambda R_0} m_0 g. \tag{6}$$

Из уравнений (5)-(6) следует, что

$$N = \frac{1}{\lambda^3} = n^3 = 1000. \tag{7}$$

1.3 Прыжки в высоту.

Используем закон сохранения энергии (работа мышц равна изменению потенциальной энергии тела):

$$F_0 b_0 = m_0 g(b_0 + h_0). \tag{8}$$

Аналогичное уравнение для лилипута (великана) имеет вид

$$(\lambda^2 F_0)(\lambda b_0) = \lambda^3 m_0 g(\lambda b_0 + h). \tag{9}$$

Из этих уравнений следует:

$$(\lambda b_0 + h) = (b_0 + h_0) \quad \Rightarrow \quad h = h_0 + (1-\lambda)b_0. \tag{10}$$

Поэтому высота прыжка лилипута равна

$$h_1 = h_0 + (1-\lambda)b_0 = (80 - 0{,}9 \cdot 50)\,см = 35\,см\ . \tag{11}$$

Если мы применим формулу (10) для великана, то получим

$$h_2 = h_0 + (1-\lambda)b_0 = (80 - 9 \cdot 50)\,см = -3{,}7\,м\ . \tag{12}$$

Однако, этот ответ не верный! Из уравнения (8) следует, то сила ног Гулливера равна

$$F_0 = m_0 g\,\frac{(b_0 + h_0)}{b_0} \approx 2{,}6 m_0 g\ . \tag{13}$$

Тогда сила ног великана равна

$$F_2 = n^2 m_0 g \approx 260 m_0 g\ ,$$

А сила тяжести

$$m_2 g = n^3 m_0 g = 1000 m_0 g\ ,$$

что превышает силу ног. Поэтому великан не сможет поднять себя – он подпрыгнуть вообще не сможет!

3.2 Термодинамика.

Условие теплового баланса для Гулливера имеет вид:

$$w m_0 = \beta S_0 (t_0 - t_{air}) \tag{14}$$

где w - средняя мощность теплоты, выделяемой единицей массы тела, β - коэффициент теплоотдачи с единицы площади поверхности тела.

Запишем аналогичное уравнение для лилипута (великана):

$$w\lambda^3 m_0 = \beta\lambda^2 S_0 (t - t_{air}) \tag{15}$$

Из этих уравнений следует

$$t = t_{air} + \lambda(t_0 - t_{air}) \tag{16}$$

Численные значения температур:
Лилипута:

$$t \approx 22^\circ . \tag{17}$$

Великана:

$$t \approx 190^\circ . \tag{18}$$

Понятно, что в этих условия никто не выживет: лилипут замерзнет, великан перегреется!

3.4 Оптика

Так как в законы геометрической оптики входят только линейные величины (длины, расстояния, радиусы кривизны), то все они должны изменяться пропорционально друг другу. Поэтому расстояние наилучшего зрения будет равно 2,5 см для лилипута и 250 см для великана.

Задание 1. Легкая разминка.

Задача 1.1

Основная идея решения: центр масс системы движется равномерно и прямолинейно. В момент времени $t = 0$:
радиус-вектор центра масс

$$\vec{R}_{C0} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}_0; \quad (1)$$

Скорость центра масс

$$\vec{V}_C = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{V}_0. \quad (2)$$

Закон движения центра масс:

$$\vec{R}_C = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}_0 + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{V}_0 t; \quad (3)$$

Сравнивая с формулой для центра масс

$$\vec{R}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad (4)$$

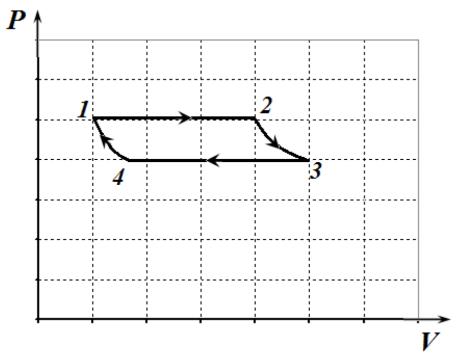
Получаем уравнение

$$\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}_0 + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{V}_0 t, \quad (5)$$

из которого находим

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_0 + \frac{m_1}{m_2}\vec{V}_0 t - \frac{m_1\vec{r}_1}{m_2}, \quad (6)$$

Задача 1.2 Тепловой подъемник



Кипение на первом этапе происходит при постоянном давлении, следовательно, при постоянной температуре. Аналогично, на третьем этапе конденсация происходит при постоянных давлении и температуре. Второй и четвертый этапы можно считать адиабатическими. Цикл паровой машины показан на рис. Так как этот цикл состоит из двух изотерм и двух адиабат, то этот цикл является циклом Карно. Поэтому его КПД рассчитывается по формуле

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (1)$$

где T_1 - температура кипения на первом этапе, T_2 - температура конденсации на третьем этапе цикла.

Температуры могут быть найдены из приведенной в условии зависимости давления насыщенного пара от температуры

Первый этап цикла происходит при постоянном давлении

$$P_1 = P_0 + \frac{(M + m)g}{S} \approx 1{,}3 \cdot 10^5 \text{ Па} \quad (2)$$

Температура пара есть температура кипения и равна

$$t_1 = \frac{P_1 + b}{a} = \frac{130 + 384}{4{,}85} \approx 106\,°C = 379\,K \ . \qquad (3)$$

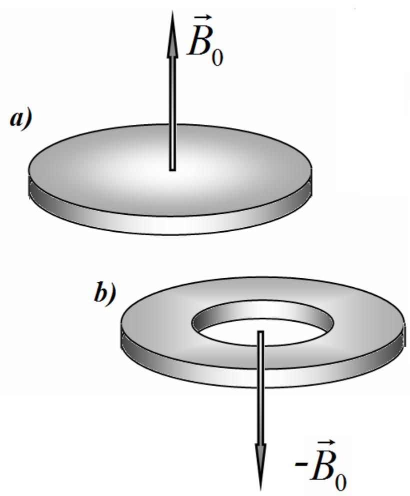
Разность температур в формуле (1) удобно вычислить по формуле

$$T_1 - T_2 = \frac{P_1 - P_2}{a} = \frac{mg}{Sa} = \frac{20}{4{,}85} \approx 4{,}2\,K \ . \qquad (4)$$

Таким образом, КПД машины равен

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{4{,}2}{379} = 1{,}1\% \ . \qquad (5)$$

Задача 1.3 Кольцевой магнит



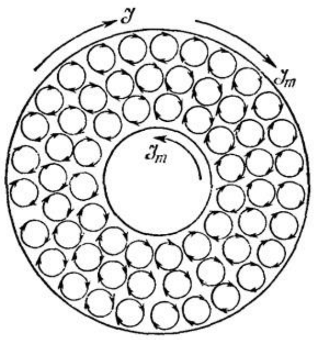
Поле постоянного магнита создается поверхностными токами намагничения. В данном случае – круговым током. Индукция поля кругового тока определяется по формуле

$$B_0 = k\frac{I}{R} \ . \qquad (1)$$

Из этой формулы следует, что индукция поля удаленного магнита (радиус которого в 2 раза меньше), в два раза больше, чем B_0. Поэтому при удалении центральной части индукция поля станет равной

$$\vec{B}_0 = \vec{B}_1 + 2\vec{B}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B}_1 = -\vec{B}_0 \ . \qquad (2)$$

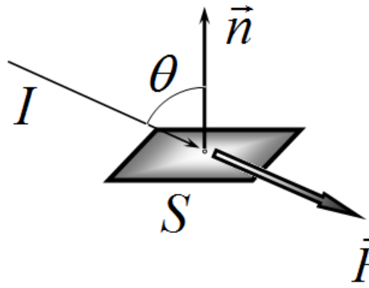
То есть модуль этой величины не изменился, но направление изменилось на противоположное!



<u>Примечание</u>. Этот же результат можно получить, рассматривая поле кольцевого магнита как суперпозицию полей двух круговых токов, текущих по внешней и внутренней поверхности кольца.

Задание 2. Оптический пинцет.

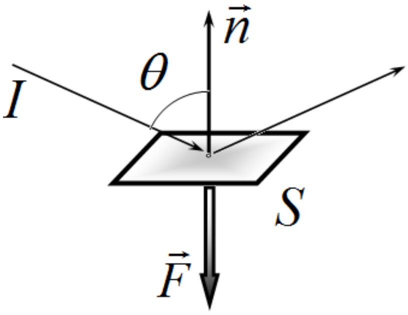
Часть 1. Продольная сила светового давления.



1.1 Импульс, который несет свет, падающий на пластинку, в единицу времени равен, равен импульсу, который получает пластинка. По второму закону Ньютона эта величина равна силе, действующей на пластинку. Поэтому

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{IS\cos\theta}{c} \qquad (1)$$

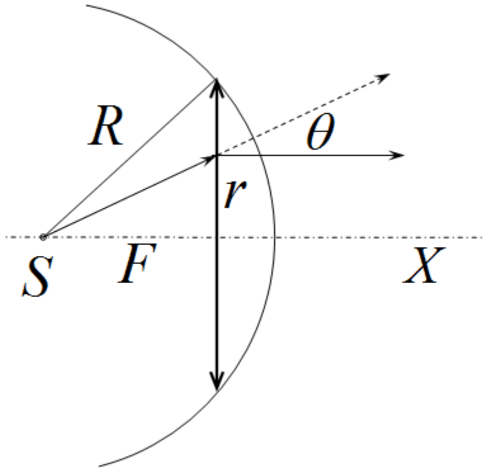
Направление этой силы совпадает с направлением падающего света.



1.2 При полном отражении света, импульс, который получает пластинка равен удвоенной нормальной проекции импульса падающего света, поэтому в данном случае

$$F = 2\frac{IS\cos\theta}{c}\cos\theta = 2\frac{IS\cos^2\theta}{c}. \qquad (2)$$

В этом случае сила направлена по нормали к пластинке.



1.3 В данном случае изменение импульса падающего света связано с изменением направления распространения света вследствие преломления в линзе. Легко заметить, что проекция импульса на оптическую ось линзы после прохождения линзы увеличивается: все лучи становятся параллельными оптической оси, а модуль импульса каждого фотона не изменяется.

Следовательно, линза получает импульс, направленный в сторону источника света, так же направлена и сила давления света: линза притягивается к источнику!

Энергия, попадающая на линзу в единицу времени равна (см. рис.):

$$P_1 = \frac{W_0}{4\pi R^2}\cdot 2\pi R(R-F) = \frac{W_0}{2}\left(1-\frac{F}{\sqrt{F^2+r^2}}\right), \qquad (3)$$

здесь $R = \sqrt{F^2+r^2}$.

Следовательно, проекция на ось X импульса света, прошедшего через линзу в единицу времени равна:

$$p_1 = \frac{W_0}{2c}\left(1-\frac{F}{\sqrt{F^2+r^2}}\right), \qquad (4)$$

До преломления в линзе световые лучи идут под разными углами к оптической оси. Выделим на волновом фронте малую площадку площади ΔS. Проекция на ось X импульса света (в единицу времени), в направлении этой площадки равна

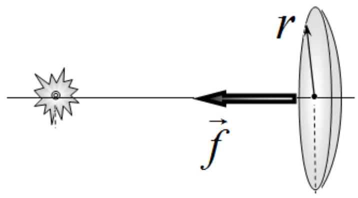
$$\Delta p_0 = \frac{W_0}{4\pi R^2 c}\Delta S\cos\theta = \frac{W_0}{4\pi R^2 c}\Delta S' \ , \tag{5}$$

Где $\Delta S'$ - площадь проекции площадки ΔS на плоскость, перпендикулярную оптической оси. Сумма всех $\Delta S'$ дает площадь линзы. Тогда, проекция импульса света на ось линзы равна

$$p_0 = \frac{W_0}{4\pi R^2 c}\cdot \pi r^2 = \frac{W_0}{4c}\frac{r^2}{F^2 + r^2}. \tag{6}$$

Окончательно, получаем, что модуль силы, действующей на линзу, равен

$$f = p_1 - p_0 = \frac{W_0}{4c}\left(1 - \frac{F}{\sqrt{F^2 + r^2}}\right)^2. \tag{7}$$



Часть 2. Поперечная сила светового давления.

2.1 В данном случае сила возникает также благодаря изменению направления распространения света.

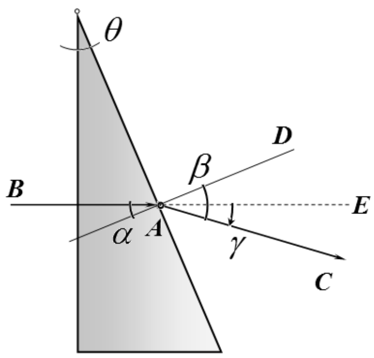
Угол отклонения луча γ после преломления в призме можно найти на основании закона преломления света и простых геометрических построений (см. рис.):

- угол падения на заднюю грань призмы: $\alpha = \theta$;
- угол преломления:

$$n\sin\theta = \sin\beta \quad \Rightarrow \quad \beta \approx n\theta;$$

- угол отклонения:

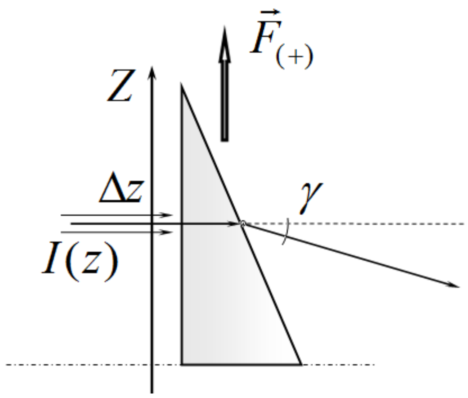
$$\gamma = \beta - \theta = (n-1)\theta. \tag{8}$$



2.1 Пучок света, попадающий на бипризму в тонком слое толщиной Δz за единицу времени переносит импульс

$$\Delta p_0 = \frac{I(z) b\Delta z}{c} \tag{9}$$

После преломления в призме вектор импульса будет направлен под углом γ. Так проекция импульса системы (свет плюс призма) на ось Z остается равным нулю, то призма получает импульс, направленный в положительном направлении оси, равный

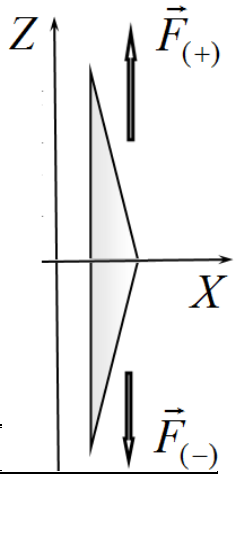


$$\Delta p_z = \frac{I(z) b\Delta z}{c}\sin\gamma \approx \frac{I(z) b\Delta z}{c}\gamma \tag{9}$$

При суммировании этих импульсов по верхней части бипризмы можно использовать среднее значение интенсивности (т.к. последняя изменяется по линейному закону). Поэтому поперечная сила, действующая на призму равна

$$F_{(+)} = \frac{I\left(\frac{a}{2}\right) ba}{c}\gamma = \frac{I\left(\frac{a}{2}\right) ba}{c}(n-1)\theta \tag{10}$$

Аналогично, сила, действующая на нижнюю часть бипризмы, равна



$$F_{(-)} = \frac{I\left(-\frac{a}{2}\right)ba}{c}(n-1)\theta \tag{11}$$

Суммарная поперечная сила равна

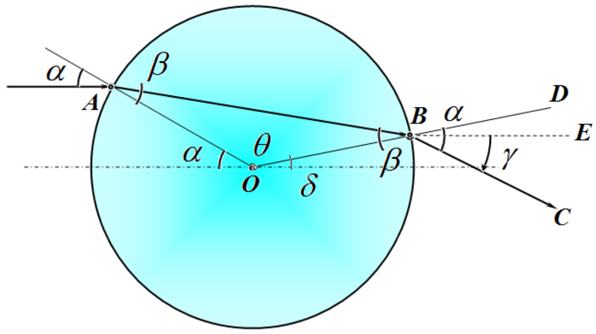
$$F = F_{(+)} - F_{(-)} = \frac{ba}{c}(n-1)\theta\left(I\left(\frac{a}{2}\right) - I\left(-\frac{a}{2}\right)\right) = g\frac{ba^2}{c}(n-1)\theta \tag{12}$$

и направлена в сторону увеличения интенсивности падающего света.
Отметим, что полученное выражение можно представить в виде

$$F = g\frac{ba^2\theta}{c}(n-1)\theta = (n-1)V\frac{1}{c}\frac{\Delta I}{\Delta z}, \tag{13}$$

здесь $ba^2\theta = 2\left(\frac{1}{2}ab(a\theta)\right) = V$ - объем бипризмы.

2.2.1 На рисунке показан ход луча через призму.



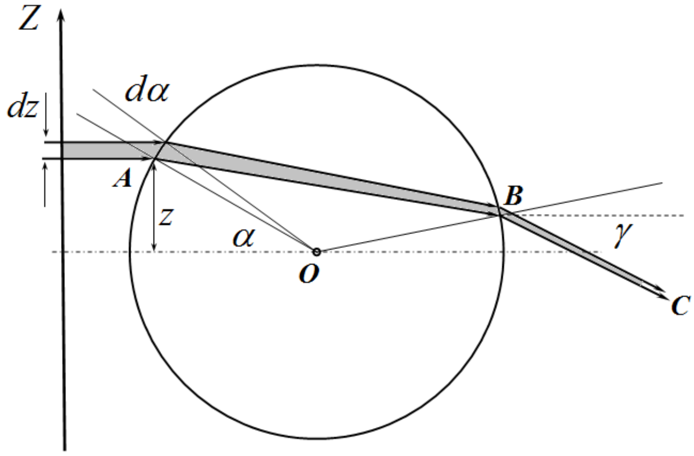
С помощью рисунка и закона преломления света (в приближении малых углов) находим угол отклонения луча:

$$\gamma = \alpha - \delta = \alpha - (\pi - \alpha - \theta) = \\ = \alpha - (\pi - \alpha - (\pi - 2\beta)) = 2(\alpha - \beta);$$

$$\sin\alpha = n\sin\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\alpha}{n};$$

$$\gamma = 2(\alpha - \beta) = 2\frac{n-1}{n}\alpha. \tag{14}$$

2.2.2 Пучок света толщиной dz, падающий на боковую поверхность диска на расстоянии z от оси X, сообщает диску в единицу времени импульс, равный



$$dp_z = \frac{I(z)hdz}{c}\sin\gamma. \tag{15}$$

Для расчета суммарного импульса (и равной ему поперечной силе)это выражение следует проинтегрировать, с учетом соотношений

$$\sin\gamma \approx \gamma = 2\frac{n-1}{n}\alpha = 2\frac{n-1}{n}\frac{z}{R}. \tag{16}$$

В результате интегрирования получим

$$F_z = \int_{-R}^{+R}\frac{I(z)h}{c}\sin\gamma\, dz \approx \int_{-R}^{+R}\frac{(I_0 + gz)h}{c}2\frac{n-1}{n}\frac{z}{R}dz = \frac{4}{3}\frac{n-1}{n}hR^2\frac{g}{c} \tag{17}$$

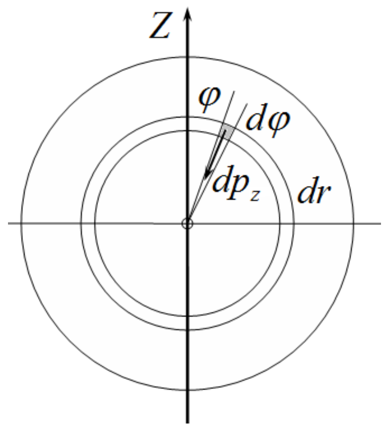
Отметим, что и эту формулу можно представить в виде

$$F_z = \frac{4}{3\pi}\frac{n-1}{n}\left(\pi R^2 h\right)\frac{g}{c} = \beta\frac{n-1}{n}V\frac{1}{c}\frac{dI}{dz} \tag{18}$$

Эта сила направлена в сторону увеличения интенсивности света.

2.3.1 Для расчета импульса, передаваемого шару, рассмотрим плоскость перпендикулярную направлению падения света. На площадку площадью $dS = rdrd\varphi$ падает свет, имеющий импульс

$$dp_0 = \frac{I(z)dS}{c}.$$



После преломления в шарике проекция этого импульса на ось Z будет равен

$$dp_z = -dp_0 \sin\gamma \cos\varphi. \qquad (19)$$

Противоположно направленный импульс получит шарик. Суммарный импульс шарика можно получить, если проинтегрировать это выражение. Учтем, что

$$\sin\gamma \approx \gamma = 2\frac{n-1}{n}\frac{r}{R};$$
$$z = r\cos\varphi.$$

Поперечная сила равна

$$F_Z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{I_0 + gr\cos\varphi}{c} \cdot 2\frac{n-1}{n}\frac{r}{R}\cos\varphi \cdot rdr = 2\pi\frac{n-1}{n}\frac{R^3}{4}\frac{g}{c} = \frac{3}{8}\frac{n-1}{n}\frac{4\pi R^3}{3}\frac{g}{c} = \frac{3}{8}\frac{n-1}{n}V\frac{1}{c}\frac{dI}{dz}. \qquad (20)$$

Таким образом,

$$\beta = \frac{3}{8}. \qquad (21)$$

Часть 3. Перемещение с помощью оптического пинцета.

3.1 Градиент интенсивности в пучке равен

$$g = \frac{dI}{dr} = -\frac{P}{\pi a^2}\frac{2r}{a^2}\exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right). \qquad (22)$$

Найдем его максимальное значение. Для этого вычислим производную найденной функции и приравняем ее к нулю

$$\left(r\exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right)\right)' = \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) - 2\frac{r^2}{a^2}\exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) = 0. \qquad (23)$$

Следовательно, градиент интенсивности принимает максимальное значение при

$$r = \frac{a}{\sqrt{2}} \qquad (24)$$

На этом расстоянии от оси должен находиться шарик, чтобы двигаться с максимальной скоростью.
Максимальное значение градиента равно

$$\left|g_{\max}\right| = \frac{\sqrt{2}P}{\pi a^3}\exp\left(-\frac{1}{2}\right). \tag{25}$$

3.1 Из равенства поперечной силы светового давления и силы вязкого трения

$$\frac{3}{8}\frac{n-1}{n}V\frac{1}{c}g_{\max} = 6\pi\eta Rv \tag{26}$$

Находим максимально возможную скорость перемещения шарика:

$$v_{\max} = \frac{1}{12}\frac{n-1}{n}\frac{R^2}{\eta c}g_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{12e^{0,5}}\frac{n-1}{n}\frac{R^2}{\eta c}\frac{P}{\pi a^3}. \tag{27}$$

Подстановка численных значений (с учетом $n = \frac{1,5}{1,33} = 1,13$) дает окончательный результат

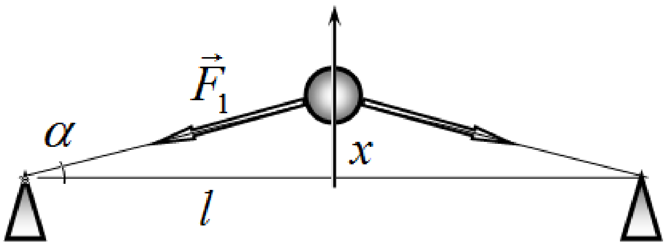
$$v_{\max} \approx 9,8\,\frac{мкм}{c}. \tag{28}$$

Задание 3. Молекулярный вибратор, управляемый электрическим полем.

Часть 1. Силы упругости.

1.1 Суммарная сила упругости равна

$$F = 4F_1 \sin\alpha = = 4k\left(\sqrt{l^2 + x^2} - l\right)\frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}}. \qquad (1)$$



1.2 При $x << l$ преобразуем к виду

$$F = 4k\left(\sqrt{l^2 + x^2} - l\right)\frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}} = 4kl\left(\sqrt{1 + \frac{x^2}{l^2}} - 1\right)\frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}} \approx$$

$$\approx 4kl \cdot \frac{x^2}{2l^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}} \approx \frac{2k}{l^2}x^3. \qquad (2)$$

1.3 Так как возвращающая сила не пропорциональна смещению, то колебания не будут гармоническими.

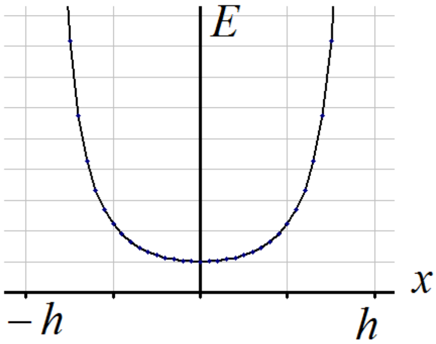
Отметим, что выражение для силы упругости имеет 3 порядок малости, поэтому и электрические силы следует рассчитывать до 3 порядка малости.

Часть 2. Электрическое поле и электрические силы.

2.1 Напряженность электрического поля находим с помощью закона Кулона

$$E(x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(h-x)^2} + \frac{1}{(h+x)^2}\right) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{h^2 + x^2}{\left(h^2 - x^2\right)^2}. \qquad (3)$$

Схематический график этой зависимости показан на рисунке.



2.2 Так как электрическая сила зависит от производной этой функции, то нужно проводить разложение до 4 порядка малости ($z = \frac{x}{h}$):

$$E(z) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h^2}\frac{1+z^2}{\left(1-z^2\right)^2} \approx \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h^2}\left(1+z^2\right)\left(1+2z^2+3z^4\right) \approx \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h^2}\left(1+3z^2+5z^4\right) \qquad (4)$$

Напряженность в начале координат

$$E_0 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h^2}. \qquad (5)$$

2.3 Зависимость электрической силы от координаты описывается формулой (с точностью до 3 порядка малости)

$$G(x) = p\frac{dE}{dx} = \alpha\varepsilon_0 E\frac{dE}{dx} = \frac{\alpha\varepsilon_0}{h}E\frac{dE}{dz} = \\ = \frac{\alpha\varepsilon_0}{h}E_0^2\left(1+3z^2+5z^4\right)\left(6z+20z^3\right) = \frac{\alpha\varepsilon_0}{h}E_0^2\left(6z+38z^3\right) \qquad (6)$$

2.4 Перепишем эту формулу в необходимом виде

$$G(x) = \frac{\alpha\varepsilon_0}{h}E_0^2\left(6z+38z^3\right) = 44\frac{\alpha\varepsilon_0}{h}E_0^2\left(\frac{6}{44}z+\frac{38}{44}z^3\right) \qquad (7)$$

Поэтому

$$G_1 = 44\frac{\alpha\varepsilon_0}{h}E_0^2; \quad b_1 = \frac{3}{22}; \quad b_3 = \frac{19}{22}. \qquad (8)$$

Часть 3. Колебания шарика.

3.1 Перепишем формулу (2) в виде

$$F = \frac{2k}{l^2}x^3 = \frac{2kh^3}{l^2}z^3. \qquad (9)$$

Следовательно,

$$F_1 = \frac{2kh^3}{l^2}. \qquad (10)$$

3.2 Уравнение равновесия имеет вид:

$$G_1\left(\frac{3}{22}z+\frac{19}{22}z^3\right) = F_1 z^3 \qquad (11)$$

Из этого уравнения следует, что координата точки равновесия равна

$$z_0 = \pm\sqrt{\frac{3G_1}{22F_1-19G_1}}. \qquad (12)$$

Отметим, что положения равновесия $z=0$ является неустойчивым.

3.3 Положения равновесия (12) существуют при $22F_1 - 19G_1 > 0$.
Или

$$G_1 < \frac{22F_1}{19} \quad \Rightarrow \quad 44\frac{\alpha\varepsilon_0}{h}E_0^2 < \frac{22}{19}\frac{2kh^3}{l^2} \quad \Rightarrow \quad E_0 < \sqrt{\frac{kh^4}{19\alpha\varepsilon_0 l^2}}. \qquad (13)$$

3.4 Для определения частоты малых колебаний представим координату z в виде $z = z_0 + \delta$ (где $\delta << z_0$). Тогда уравнение движения шарика будет иметь вид

$$m\ddot{x} = mh\ddot{z} = G(z_0+\delta) - F(z_0+\delta). \qquad (14)$$

В этом уравнении следует провести разложение до первого порядка малости величины δ :

$$G(z) == \frac{G_1}{22}\left(3(z_0+\delta)+19(z_0+\delta)^3\right) = \frac{G_1}{22}\left(3z_0+19z_0^3\right)+\frac{1}{22}G_1\left(3+57z_0^2\right)\delta$$

$$F(z) = \frac{2k}{l^2}x^3 = F_1(z_0+\delta)^3 \approx F_1z_0^3+3F_1z_0^2\delta$$

Тогда уравнение (14) становится уравнением гармонических колебаний:

$$mh\ddot{\delta} = \frac{G_1}{22}\left(3z_0+17z_0^3\right)+\frac{1}{22}G_1\left(3+57z_0^2\right)\delta - F_1z_0^3 - 3F_1z_0^2\delta \quad \Rightarrow$$
$$\ddot{\delta} = -\frac{3F_1z_0^2-\frac{1}{22}G_1\left(3+57z_0^2\right)}{mh}\delta \quad . \qquad (15)$$

Частота, которых равна

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3F_1z_0^2-\frac{1}{22}G_1\left(3+57z_0^2\right)}{mh}} \; . \qquad (16)$$