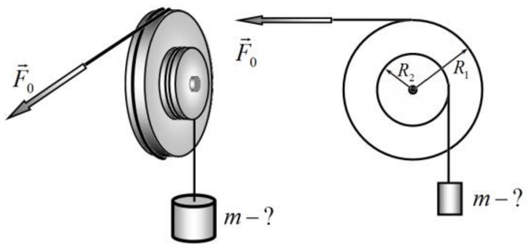
Задание 1. Простая задача про простые механизмы.

Когда великий Архимед открыл правило рычага, он воскликнул: «Дайте мне точку опоры, и я переверну Землю!».

И не случайно – еще в античные времена это правило трансформировалось в «золотое правило механики»: «ни один механизм не дает выигрыша в работе, во сколько раз выигрываешь в силе, во столько раз проигрываешь в расстоянии!». А через две тысячи лет из этого правила вырос закон сохранения энергии, основа современной физики. Вам предстоит доказать, что Вы понимаете «золотое правило механики» и его применение к различным механизмам. Во всех устройствах трением пренебрегайте.

1.1. Ворот

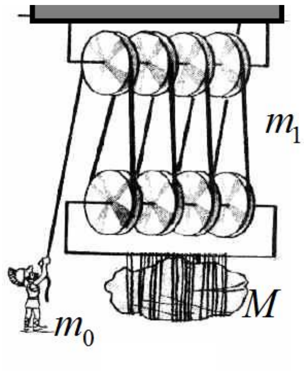


Подъемное устройство (ворот) состоит из двух соединенных толстых дисков, насаженных на одну горизонтальную ось. Радиусы дисков равны R_1, R_2.

На боковые поверхности дисков намотаны крепкие веревки. Одну из них тянут горизонтально с постоянной силой $\vec{F}_0$.

1.1 Определите массу груза m, который можно поднять с помощью этого устройства.

1.2. Полиспаст



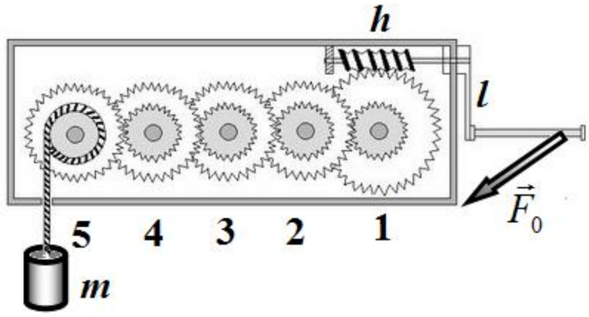
На рисунке показано еще одно подъемное устройство – полиспаст. Масса всех одинаковых блоков полиспаста равна m_1, массой остальных его частей можно пренебречь.

1.2 Определите массу груза M, который может поднять человек массы m_0 с помощью этого устройства.

1.3. Сделай сам

1.3 Предложите устройство, систему подвижных и неподвижных блоков, которая дает выигрыш в силе в 3 раза. Нарисуйте схему этого устройства.

1.4. Лебедка



На рисунке показана схема еще одного подъемного устройства – лебедки. Сдвоенные шестерни 1-4 имеют n_1 зубьев на большей шестеренке и n_2 зубьев на меньшей шестеренке (причем $n_1 = 2n_2$). На последней, 5-й ступени, меньшая шестеренка заменена на диск радиуса r, на который намотана веревка, к которой привязывают поднимаемый груз m. Первую шестерню приводят во вращения с помощью червячного механизма. Ось червяка вращают с помощью ручки, длина плеча которой равна l. Силу F_0 прикладывают к рукоятке перпендикулярно плечу.

1.4 Определите массу груза, которую можно поднять с помощью этой лебедки.

Задание 2. Системы единиц

Большинство физических величин имеют определенную размерность, т.е. измеряются в определенных единицах измерения. Любая система единиц измерения содержит основные единицы (для которых существуют определенные эталоны) и производные единицы, которые выражаются через основные единицы.

Часть 1. Система СИ

В настоящее время наибольшее распространения получила система единиц СИ. Как известно, к числу основных единиц этой системы относятся:
- единица длины *метр* $[L] = м$;
- единица времени *секунда* $[t] = с$;
- единица массы *килограмм* $[m] = кг$;
- единица силы тока *ампер* $[I] = A$.

Далее мы рассмотрим некоторые производные единицы этой системы, которые могут быть выражены через приведенные здесь основные единицы.

1.1 . Паскаль.

Блез Паскаль (фр. *Blaise Pascal*); (годы жизни1623 -1662)
- французский математик, физик, литератор, философ, теолог; один из основателей математического анализа, теории вероятностей; создатель первых образцов счетной техники, автор основного закона гидростатики.
Его именем названа единица измерения давления в системе СИ.

1.1.1 Выразите единицу измерения давления Паскаль через основные единицы измерения системы СИ.

1.1.2 А в каких единицах измерял давление сам Блез Паскаль? В *дюймах ртутного столба* - гидростатическое давление, которое создает столб ртути высотой в 1 дюйм. Чему равна единица давления Б. Паскаля в единице системы СИ - *Паскалях*.

1 дюйм равен 2,54 см; плотность ртути $\rho = 13{,}5 \frac{г}{см^3}$, ускорение свободного падения $g = 9{,}81 \frac{м}{с^2}$

1.2 . Джоуль

Джеймс Прескотт Джоуль (годы жизни 1818 – 1889) – английский физик, внесший значительный вклад в развитие термодинамики.
Его именем названа единица измерения работы и энергии в системе СИ.

1.2.1 Выразите единицу измерения энергии *Джоуль* через основные единицы системы СИ.

1.2.2 А в каких единицах измерял работу Дж. П. Джоуль? В *футо-фунтах* - работа, которую необходимо совершить, чтобы поднять тело массой 1 фунт на высоту 1 фут. Чему равна единица измерения работы Дж.П. Джоуля в единице системы СИ - *Джоулях*?

1 фут равен 30,5 см; 1 фунт равен 450 г.

1.3 . Ом

Георг Симон Ом (нем. *Georg Simon Ohm)* (годы жизни 1789 – 1854) – немецкий физик, теоретически вывел и экспериментально подтвердил закон, выражающий связь между силой тока, напряжением и сопротивлением. Его именем названа единица измерения электрического сопротивления в системе СИ.

1.3.1 Выразите единицу измерения сопротивления *Ом* через основные единицы системы СИ.

1.3.2 Во времена исследований Г.С. Ома еще не существовало строгих понятий силы тока, напряжения, электрического сопротивления. Поэтому фактический Г.С. Ом в качестве единицы сопротивления использовал сопротивление единицы длины медного провода – сантиметр. Рассчитайте, чему равно сопротивление 1 Ом в «медных» сантиметрах.

Удельное сопротивление меди $\rho = 0{,}0167\,\frac{Ом \cdot мм^2}{м}$; считайте, что площадь поперечного сечения использованного медного провода равна 1,00 мм^2.

Часть 2. Планковская система единиц

Макс Карл Эрнст Людвиг Планк (нем. *Max Karl Ernst Ludwig Planck*; годы жизни 1858 – 1947) немецкий физик-теоретик, основоположник квантовой физики. Лауреат Нобелевской премии по физике (1918).

Выбор единиц измерения достаточно условный. Поэтому особую роль играют естественные системы единиц, в основу которых положены фундаментальные физические постоянные. Впервые такую систему единиц предложил Макс Планк. В этой системе все механические единицы выражаются через следующие постоянные (численные значения приведены в системе СИ, размерность этих постоянных Вы должны установить самостоятельно):

- скорость света $c = 3{,}00 \cdot 10^{8}$;
- гравитационную постоянную $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ (которая входит в качестве коэффициента в закон всемирного тяготения $F = G\dfrac{m_1 m_2}{R^2}$);
- постоянную Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ (эта постоянная входит практически во все формулы квантовой механики, например, энергия светового фотона равна $E = h\nu$, ν - частота света).

Считается, что планковская длина (и связанное с ней планковское время) определяют масштабы, на которых современные физические теории перестают работать: геометрия пространства-времени, предсказываемая общей теорией относительности, на расстояниях порядка планковской длины и меньших теряет смысл из-за квантовых эффектов. Предполагается, что явления природы на этих масштабах должна адекватно описывать некая гипотетическая, до настоящего времени не сформулированная, теория, объединяющая общую теорию относительности и квантовую механику — квантовая гравитация. Доказано, что планковская масса является нижним пределом масс чёрных дыр, и предполагается, что она представляет собой верхний предел для масс элементарных частиц.

2.1 Выразите единицу длины l_P в планковской системе единиц через постоянные c, G, h. Рассчитайте ее численное значение.

2.2 Выразите единицу времени t_P в планковской системе единиц через постоянные c, G, h. Рассчитайте ее численное значение.

2.3 Выразите единицу массы m_P в планковской системе единиц через постоянные c, G, h. Рассчитайте ее численное значение.

Задание 3. Приключения Гулливера

Книга Джонатана Свифта «Путешествия Лемюэля Гулливера в некоторые отдаленные страны света, сначала хирурга, а потом капитана нескольких кораблей», написанная в 18 веке, пользуется до настоящего времени большой популярностью.

В данном задании вам необходимо проанализировать некоторые факты первых частей этой книги (путешествие в страну лилипутов и путешествие в страну великанов) с точки зрения физики.

Для анализа примем следующие предположения:

- лилипуты в $n = 10$ раз меньше Гулливера, а великаны в $n = 10$ раз больше Гулливера;
- как для лилипутов, так и для великанов, сохраняются все геометрические пропорции для размеров частей тела, в той же пропорции изменяются и размеры всех предметов;
- лилипуты и великаны состоят из тех же атомов и молекул, что и Гулливер, поэтому физические и химические свойства всех органов рассматриваемых существ одинаковы;
- физические характеристики окружающей среды (воздуха, воды и т.д.) одинаковы во всех странах;
- сила, которую может развить мышца, пропорциональна площади ее поперечного сечения.

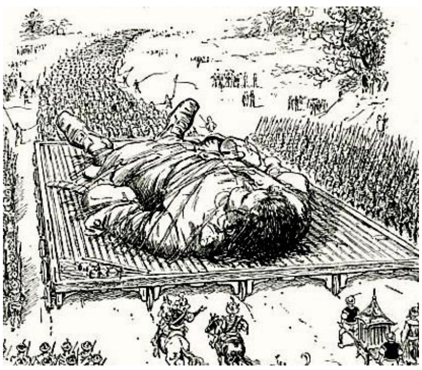
Массу Гулливера примем равной $m_0 = 80\ кг$, его рост $l_0 = 180\ см$.

1. Механика

1.1. Массы тел

1.1. Рассчитайте массы лилипута и великана.

1.2. Перевозка Гулливера



Примем следующие приближения:

- для перевозки Гулливера на обычной платформе достаточно одной обыкновенной лошади;
- На колеса платформы действуют силы трения качения, которые рассчитываются по формуле:

$$F = \frac{\mu}{R} mg \,, \qquad (1)$$

где m - масса перевозимого груза вместе с платформой, R - радиус колес, g - ускорение свободного падения, μ - постоянный коэффициент трения качения.

1.2 Рассчитайте, сколько «лилипутских» лошадей надо использовать, чтобы перевести Гулливера на платформе.

1.3. Прыжки в высоту

Гулливер, прыгая с места вертикально вверх, может подпрыгнуть на высоту $h_0 = 80\,см$. Это высота, на которую поднимается центр масс тела от положения центра масс в вертикальном положении стоя.

Примем следующую модель прыжка:

- человек приседает, а затем, развивая максимальные усилия мышц ног, выпрямляется; при этом центр масс движется вертикально (на этом этапе центр масс Гулливера поднимается на высоту $b_0 = 50\,см$); сила, развиваемая мышцами ног в процессе прыжка постоянна;
- после того, как человек полностью выпрямился (и достиг при этом максимальной скорости), он отрывается от земли; именно от этого положении отсчитывается высота дальнейшего «полета»;
- сопротивлением воздуха следует пренебречь.

1.3 Рассчитайте, на какую высоту могут подпрыгнуть с места лилипут и великан.

2. Термодинамика

В организме любого живого существа в результате процессов жизнедеятельности происходит постоянное выделение теплоты. Можно считать, что мощность выделяющейся теплоты пропорциональна массе тела. Эта теплота, благодаря процессам теплообмена, уходит в окружающую среду. Приближенно можно считать, что мощность теплоты, уходящей в окружающую среду, пропорциональна площади поверхности тела и разности температур тела и окружающей среды.

Примем, что температура тела Гулливера при ходьбе равна $t_0 = 37°C$, если температура окружающего воздуха $t_{air} = 20°C$.

2.1 Рассчитайте температуры тел лилипута и великана в тех же условиях.

3. Оптика

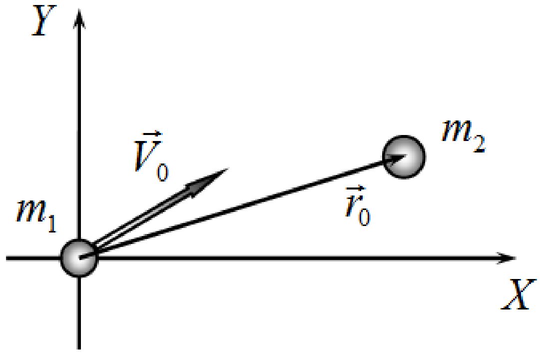
Для обычного человека (т.е. Гулливера) расстояние наилучшего зрения равно 25 см. Если предмет находится на этом расстоянии от глаза, то на сетчатке глаза формируется четкое изображение предмета без напряжения зрачка.

3.1 Чему равны расстояния наилучшего зрения для лилипута и великана?

Задание 1. Легкая разминка

Задание состоит из трех не связанных между собой задач.

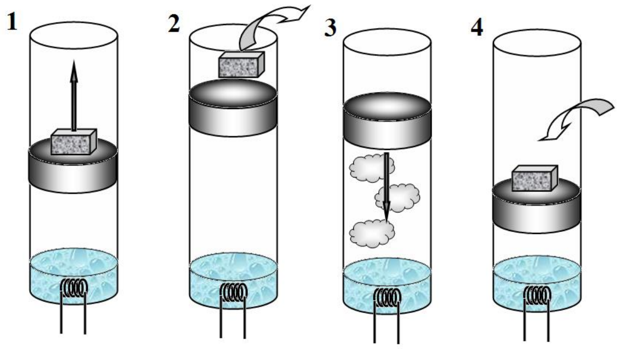
Задача 1.1. Столкновение



Два небольших заряженных шарика, массы которых равны m_1 и m_2, могут двигаться без трения в горизонтальной плоскости XY. В момент времени $t=0$ первый шарик находится в начале координат и имеет скорость $\vec{V}_0$, второй шарик покоится в точке, радиус – вектор которой $\vec{r}_0$. В момент времени t первый шарик оказался в точке, радиус-вектор которой $\vec{r}_1$.

1.1.1 Найдите $\vec{r}_2$ радиус-вектор точки, в которой находится второй шарик в этот момент времени.

Задача 1.2. Тепловой подъемник.



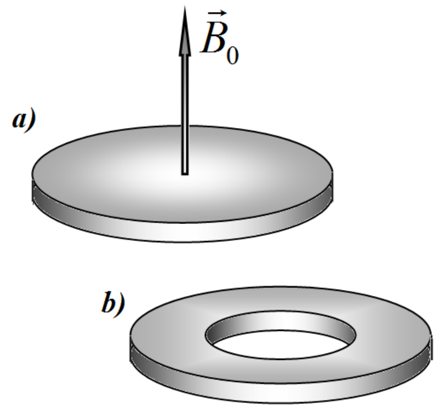
Паровая машина состоит из вертикального цилиндрического сосуда, в котором может двигаться без трения поршень. В сосуде находится вода, внутри которой расположен электрический нагреватель. Цикл паровой машины состоит из 4 этапов, показанных на рисунке:

1. На поршне находится груз, включают нагреватель, вода кипит, пар поднимает поршень с грузом.
2. После того, как поршень поднялся на некоторую высоту, груз быстро снимают и выключают нагреватель.
3. Пар под поршнем остывает и конденсируется, поршень медленно опускается.
4. После того как поршень опустился на определенную высоту, на него снова кладут груз.

Атмосферное давление $P_0 = 1{,}0\cdot 10^5\,Па$, масса поршня $M = 2{,}0\,кг$, его площадь $S = 10\,см^2$, масса груза $m = 1{,}0\,кг$. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8\,\frac{м}{с^2}$. Считайте, что под поршнем находится только водяной пар. Зависимость давления насыщенного водяного пара от температуры в рассматриваемом диапазоне описывается функцией приближенной функцией $P = at^\circ - b$, где, $a = 4{,}85\,\frac{кПа}{К}$, $b = 384\,кПа$, t° - температура в градусах Цельсия.

1.2.1 Нарисуйте схематический график циклического процесса в координатах (P,V).

1.2.2 Рассчитайте коэффициент полезного действия описанной тепловой машины.

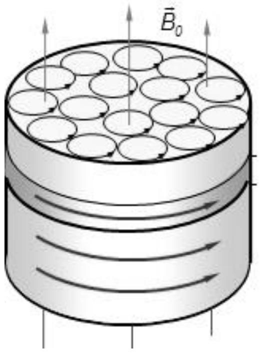


Задача 1.3. Кольцевой магнит

Постоянный магнит имеет форму тонкого диска, который намагничен перпендикулярно плоскости диска. Индукция магнитного поля в центре диска равна $\vec{B}_0$, и направлена по оси диска (рис. a).

В центре диска вырезают круглое отверстие, радиус которого в два раза меньше радиуса диска (рис. b).

1.3.1 Чему будет равна индукция магнитного поля $\vec{B}_1$ в центре получившегося кольцевого магнита? Укажите направление этого вектора.

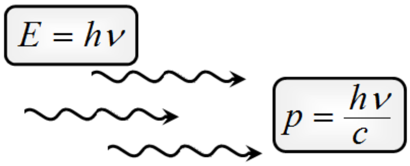


Подсказка: Вспомните гипотезу Ампера о молекулярных токах, которая объясняет намагничивание магнитов.

Задание 2. Оптический пинцет

Оптический пинцет («лазерный пинцет» или «оптическая ловушка») - оптический инструмент, который позволяет передвигать микроскопические объекты с помощью лазерного света. В 2018 году нобелевская премия по физике «за изобретение оптического пинцета и его применение в биологических системах» была присуждена создателю оптического пинцета Артуру Эшкину.

В основу действия таких приборов положено хорошо известное явление – давление света. Световые частицы, фотоны, помимо энергии $E = h\nu$ (h - постоянная Планка, ν - частота света), обладают импульсом, модуль которого определяется формулой



$$p = \frac{h\nu}{c}, \qquad (1)$$

($c = 3{,}00 \cdot 10^8\ \frac{м}{с}$ - скорость света в вакууме).

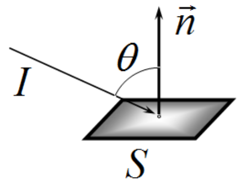
Направление вектора импульса фотона совпадает с направлением распространения света. Передача импульса света телам и обуславливает световое давление.

В данном задании используется понятие интенсивности света: энергия, переносимая светом в единицу времени через площадку единичной площади, ориентированную перпендикулярно направлению распространения света.

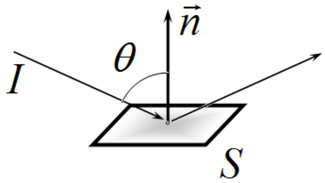
$$I = \frac{\Delta E}{\Delta t\, \Delta S}. \qquad (2)$$

Часть 1. Продольная сила светового давления

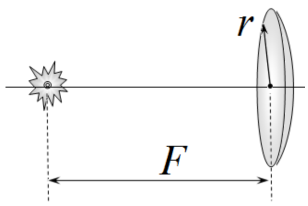
1.1 Однородный световой поток интенсивности I падает под углом θ на плоскую абсолютно черную пластинку площади S и полностью поглощается пластинкой. Найдите, чему равен модуль силы светового давления на пластинку. Укажите направление этой силы.



1.2 Однородный световой поток интенсивности I падает под углом θ на плоскую зеркальную пластинку площади S и полностью отражается от нее. Найдите, чему равен модуль силы светового давления на пластинку. Укажите направление этой силы.



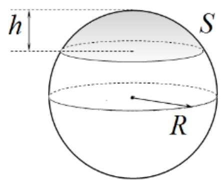
1.3 Точечный изотропный источник света, световая мощность которого равна W_0, расположен в фокусе тонкой собирающей линзы. Фокусное расстояние линзы равно F, ее радиус равен R. Найдите силу светового давления на линзу f. Укажите направление этой силы. Отражением и поглощением света пренебречь.



Подсказка.

Площадь поверхности шарового сегмента равна произведению длины окружности большого круга шара на высоту сегмента:

$$S = 2\pi Rh. \qquad (3)$$



Часть 2. Поперечная сила светового давления

В данной части задания рассматривается несколько примеров, когда прозрачный предмет освещается неоднородным световым потоком, интенсивность которого изменяется в поперечном сечении пучка.

Световой поток распространяется вдоль оси X. Его интенсивность зависит от координаты z (ось Z перпендикулярна направлению распространения света оси X). Можно считать, что в пределах освещаемого предмета эта зависимость интенсивности описывается линейным законом

$$I(z) = I_0 + gz\,, \tag{4}$$

где $g = \dfrac{dI}{dz}$ - градиент интенсивности светового потока, считайте, что $g > 0$.

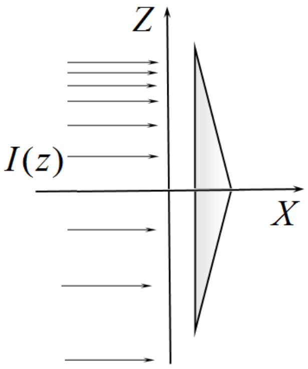
В таком световом потоке возможно возникновение силы светового давления, направленной перпендикулярно направлению распространения света, вдоль оси Z. Во всех пунктах этого задания Вы должны рассчитывать именно силу F_z, направленную перпендикулярно лазерному лучу. В реальных устройствах продольная сила светового давления F_x может быть компенсирована другими силами (например, силой реакции со стороны подложки), либо с помощью двух одинаковых световых лучей, распространяющихся навстречу друг другу.

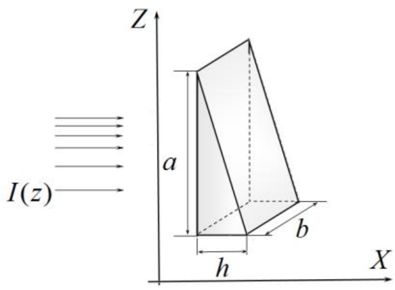
Во всех вопросах данной задачи следует считать углы отклонения световых лучей малыми, так, что можно использовать приближенные значения тригонометрических функций:

$$\cos\alpha \approx 1, \quad \sin\alpha \approx tg\alpha \approx \alpha \tag{5}$$

Кроме того, следует считать, что при описании прохождения света через прозрачные предметы применимо приближение геометрической оптики, т.е. явления дифракции и интерференции света можно не учитывать. Также можно пренебречь поглощением и отражением света.

2.1 Симметричная бипризма, состоящая из двух одинаковых треугольных призм, освещается (как показано на рисунке) параллельным неоднородным пучком света, интенсивность которого изменяется по его поперечному сечению и зависит от координаты z по закону (4).

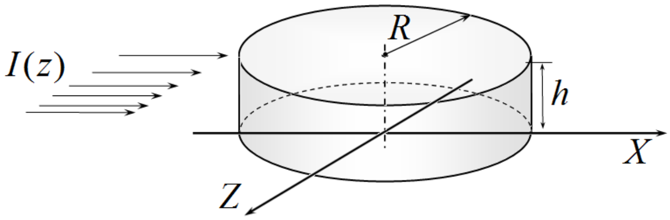




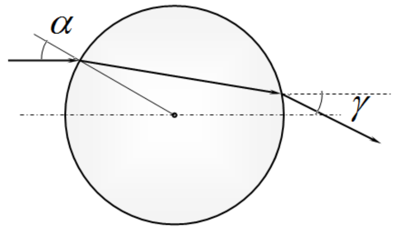
Бипризма находится в воздухе. Показатель преломления материала призмы равен n. Геометрические размеры призмы a, b, h показаны на рисунке. Угол при вершине призмы θ можно считать малым.

2.1.1 Найдите проекцию силы светового давления F_z, действующей на бипризму, на ось Z (направленную перпендикулярно падающему свету). Ответ выразите через величины I_0, g, c, n и геометрические размеры призмы a, b, h.

2.2 Прозрачный диск радиуса R и толщины h изготовлен из материала с показателем преломления n. Боковая поверхность освещается параллельным неоднородным пучком света, интенсивность которого изменяется по его поперечному сечению и зависит от координаты z по закону (4).

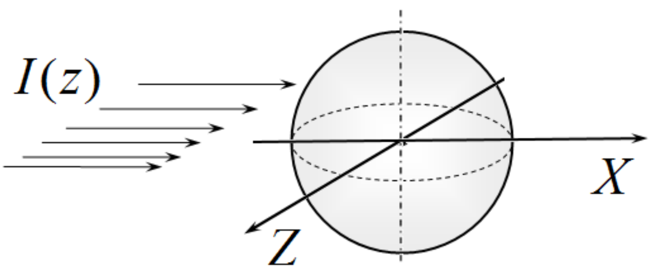


2.2.1 Рассмотрим луч света, падающий на боковую поверхность диска так, что угол между этим лучом и нормалью в точке падения равен α. Рассчитайте, на какой угол γ отклонится луч после прохождения диска.



2.2.2 Найдите проекцию силы светового давления, действующей на диск, F_z на ось Z (направленную перпендикулярно падающему свету). Ответ выразите через величины I_0, g, c, n и геометрические размеры диска R, h.

2.3 Прозрачный шарик радиуса R изготовлен из материала с показателем преломления n. Шарик освещается параллельным неоднородным пучком света, интенсивность которого изменяется по его поперечному сечению и зависит от координаты z по закону (4).



2.3.1 Покажите, что проекция силы светового давления, действующей на шарик, F_z на ось Z (направленную перпендикулярно падающему свету) рассчитывается по формуле

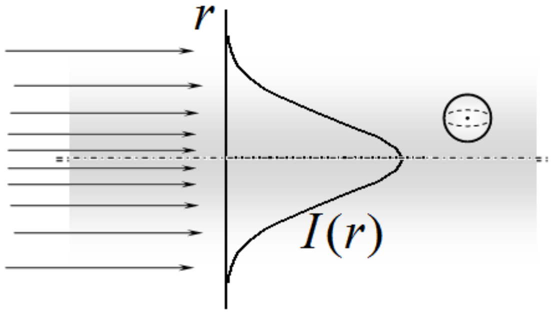
$$F_z = \beta \frac{n-1}{n} V \frac{1}{c} \frac{\Delta I}{\Delta z} \quad , \tag{6}$$

где β - безразмерный коэффициент, V - объем шарика.

2.3.2 Рассчитайте численное значение коэффициента β.

Если Вам не удалось рассчитать значение этого коэффициента, то в последней части задачи используйте значение $\beta = 0{,}50$.

Часть 3. Перемещение с помощью оптического пинцета.



Стеклянный шарик радиуса $R = 1{,}31\ мкм$ с показателем преломления $n = 1{,}50$ находится в воде, показатель преломления которой равен $n_0 = 1{,}33$. Шарик передвигают с помощью осесимметричного лазерного пучка, мощность которого равна $P = 19\ мВт$ в направлении, перпендикулярном направлению распространения света. Распределение интенсивности пучка по его поперечному сечению (зависимость интенсивности от расстояния до оси пучка r) описывается формулой

$$I(r) = \frac{P}{\pi a^2}\exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right), \tag{7}$$

где $a = 3{,}20\ мкм$.

При движении шарика в воде со скоростью $\vec{v}$ на него действует сила вязкого трения, которая рассчитывается по формуле Стокса

$$\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v}, \tag{8}$$

где $\eta = 8{,}90 \cdot 10^{-4}\ Па \cdot с$ коэффициент вязкости воды.

3.1 Найдите, на каком расстоянии от оси пучка должен находится шарик, чтобы он мог перемещаться с максимальной скоростью в направлении, перпендикулярном направлению распространения пучка.

3.2 Рассчитайте, с какой максимальной скоростью можно передвигать шарик с помощью лазерного луча в направлении, перпендикулярном пучку.

Численные значения параметров данной части взяты из работы А. Эшкина.

Задание 3. Молекулярный вибратор, управляемый электрическим полем.

Данное задание разработано на материалах обзорной статьи:
Synergy of physical properties of low-dimensional carbon-based systems for nanoscale device design/ N. A. Poklonski, S.A. Vyrko, A. I. Siahlo, O. N. Poklonskaya, S. V. Ratkevic, N. N. Hieu, A. A. Kocherzhenko/ Matter. Res. Express, 6 (2019).

На рисунке, взятом из указанной статьи, показана схема вибратора, управляемого электрическим полем. Сложная плоская молекула (показанная на рисунке слева) содержит атом олова (Sn). Этот атом может колебаться в направлении, перпендикулярном плоскости молекулы. Частота этих колебаний может изменяться под действием электрического поля. Строгий расчет характеристик молекулярных колебаний возможен только с помощью квантовой механики.

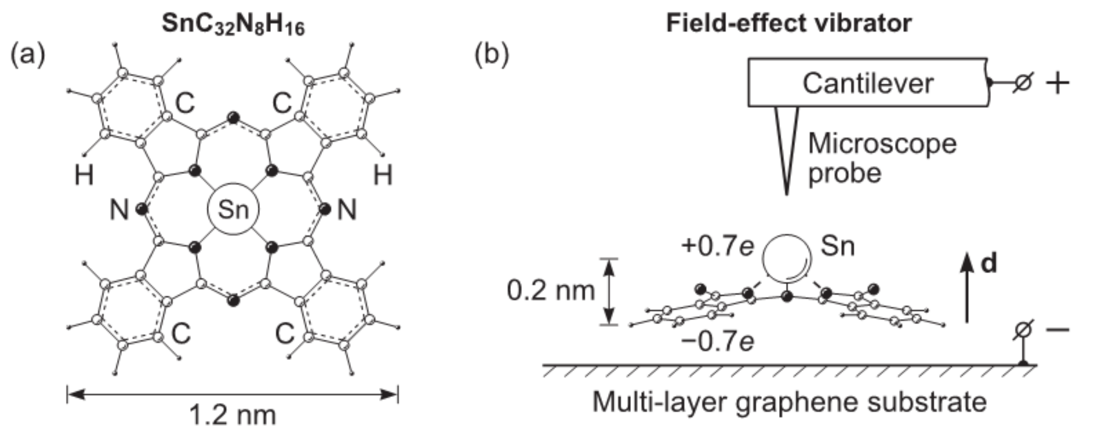
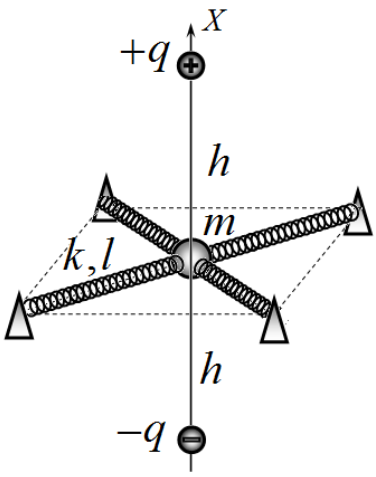


Figure 15. (a) Top view of funnel-like carbon-based molecule $SnC_{32}N_8H_{16}$ (i.e. SnPc). (b) Scheme of an electromechanical vibrator based on a single SnPc molecule placed over multi-layer graphene substrate (as electrode) under a microscope probe (side view). The vibrator is operated by applying an electric field between the probe and the substrate; e is the elementary charge, $\mathbf{d}$ is the intrinsic electric dipole moment of the molecule.

Однако наиболее характерные особенности движения этого атома могут быть получены и в рамках классической физики. Для этого рассмотрим следующую упрощенную модель рассмотренного вибратора.

Шарик массы m (моделирующий атом олова Sn) соединен с 4 одинаковыми пружинами (моделируют химические связи атома олова с соседними атомами). Жесткость каждой пружины k, их длины в недеформированном состоянии равны l. Противоположные концы пружин закреплены в вершинах квадрата. Когда шарик находится в центре квадрата, пружины не деформированы. Шарик может двигаться вдоль прямой, перпендикулярной плоскости квадрата. Направим ось координат x вдоль этой прямой, начало отсчета совместим с центром квадрата.



На расстоянии h от центра квадрата закреплен точечный заряд $+q$, который моделирует заряд на острие зонда микроскопа (microscope probe).

Симметрично плоскости квадрата закреплен электрический заряд $-q$, который моделирует заряд-изображение в проводящей плоскости (grapheme substrate). В атомной физике силой тяжести следует пренебрегать.

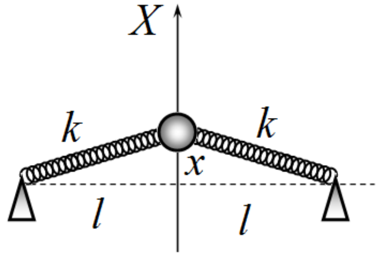
В данном задании анализируется движение шарика вдоль указанной оси X. Радиус шарика значительно меньше геометрических величин h, l.

При выполнении данного задания рекомендуем использовать приближенную формулу

$$(1+z)^{\gamma} = 1+\gamma z + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2!}z^2 + \frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)}{3!}z^3 + \dots \qquad (1)$$

Эта формула справедлива для малых значений безразмерной величины $z \ll 1$ *и любого показателя степени* γ. *Каждый раз при использовании этой формулы подумайте, сколько слагаемых следует оставлять для дальнейших преобразований.*

Часть 1. Силы упругости.



Пусть шарик смещается на расстояние x от центра квадрата.

1.1 Найдите зависимость суммарной силы упругости $F(x)$, действующей на шарик со стороны 4 пружин, от смещения шарика x.

Напоминаем, что, когда шарик находится в центре квадрата, пружины не деформированы!

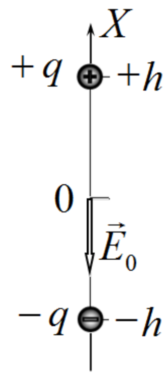
1.2 Покажите, что при $x \ll l$ формулу для суммарной силы упругости можно приближенно представить в виде

$$F = Cx^n. \qquad (2)$$

Найдите значения постоянных величин C, n в этой формуле.

1.3 Укажите, будут ли колебания шарика при отсутствии электрического поля гармоническими?

Часть 2. Электрическое поле и электрические силы.



Электрическое поле создается двумя точечными зарядами $+q, -q$, расположенных на оси X симметрично относительно начала отсчета, в точках с координатами $\pm h$.

2.1 Найдите зависимость модуля напряженности электрического поля $E(x)$ на оси X от координаты x. Постройте схематический график этой зависимости.

В дальнейшем вместо координаты шарика x используйте безразмерную величину $z = \frac{x}{h}$. При малых значениях $x \ll h$, полученную зависимость $E(x)$ с помощью приближенной формулы (1) можно представить в виде

$$E(z) = E_0\left(1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots\right) \qquad (3)$$

где E_0 - напряженность поля в начале координат, $a_1, a_2, a_3, \dots$ - численные коэффициенты. В этой формуле следует оставить столько слагаемых, сколько потребуется для дальнейших расчетов.

2.2 Выразите значение E_0 через значения q, h. Рассчитайте значения коэффициентов a_1, a_2, a_3,...

В дальнейшем считайте величину E_0 известной. В дальнейших расчетах используйте только приближенную формулу (3) с найденными численными коэффициентами.

Под действием электрического поля напряженности E шарик поляризуется и приобретает дипольный момент, модуль которого равен

$$p = \alpha\varepsilon_0 E \tag{4}$$

где α - поляризуемость шарика (считайте ее известной), ε_0 - электрическая постоянная.

Со стороны электрического поля на электрический диполь действует сила

$$F = p\frac{dE}{dx}. \tag{5}$$

2.3 Найдите зависимость силы $G(z)$, действующей на шарик со стороны электрического поля, от положения шарика z.

2.4 Представьте полученную зависимость в приближенной виде

$$G(z) = G_1 \cdot \left(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + ...\right) \tag{6}$$

где G_1 - значение функции $G(z)$ при $z = 1$. Выразите значение G_1 через величины E_0, α, h. Найдите численные значения коэффициентов b_0, b_1, b_2,... . Оставьте в этой формуле столько слагаемых, сколько необходимо для дальнейших расчетов.

Часть 3. Колебания шарика.

3.1 Представьте зависимость силы упругости от положения шарика (2) в виде

$$F(z) = F_1 \cdot z^n \tag{7}$$

где F_1 - значение функции при $z = 1$. Выразите значение F_1 через заданные параметры модельной системы.

При включении электрического поля положение равновесия шарика смещается. Обозначим координату положения равновесия z_0

3.2 Выразите значения координаты положения равновесия z_0 через параметры системы F_1 и G_1.

3.3 Найдите максимальное значение напряженности электрического поля в начале координат $E_{0\max}$, при котором шарик может совершать колебания.

3.4 Рассчитайте частоту ν малых колебаний шарика вблизи положения равновесия z_0, если напряженность электрического поле в начале координат $E_0 < E_{0\max}$. Выразите значения частоты ν через параметры F_1, G_1, z_0, m.