



Осенний дождь

Типичная осенняя белорусская погода – мелкий морозящий дождь! Такая погода часто наводит уныние, но... может послужить прекрасной темой для физических исследований! Во всех пунктах данной задачи считайте, что ускорение свободного падения равно $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Часть 1. Компьютерный эксперимент.

Капли падают в воздухе, поэтому во время падения на них действует сила сопротивления воздуха. Будем считать, что эта сила пропорциональна квадрату скорости. Через некоторый промежуток движение капли становится равномерным с некоторой установившейся скоростью u .

Направим ось координат Ox вертикально вниз. В момент времени $t = 0$ координата капли $x_0 = 0$, ее скорость $v_0 = 0$.

1.1 Запишите формулу, описывающую зависимость ускорения капли a от ее скорости v . В этой уравнение в качестве параметров должны входить только ускорение свободного падения g и скорость установившегося движения u .

Разгон капли не является равноускоренным! Поэтому строго рассчитать зависимости скорости и координаты капли от времени сложно. Но... можно провести приближенный (с малой погрешностью) компьютерный расчет. Для этого надо разбить время движения на малые промежутки времени Δt , в пределах которых можно пренебречь изменением ускорения. Рассмотрим движение в течение интервала времени от t_k до $t_{k+1} = t_k + \Delta t$. Допустим, нам известно значение скорости v_k и координаты капли x_k в момент времени t_k . Это позволяет рассчитать ускорение в этот момент времени a_k . Считая это ускорение постоянным в течение рассматриваемого промежутка времени, можно рассчитать значение скорости v_{k+1} и координаты капли x_{k+1} .

1.2 Запишите формулы, позволяющие по известным значениям a_k, v_k, x_k и Δt рассчитать значения v_{k+1}, x_{k+1} .

1.3 Проведите расчет падения капли (зависимостей скорости капли $v(t)$ и ее координаты $x(t)$ от времени) при $u = 3,00 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ и $\Delta t = 0,050 \text{с}$ за 1 секунду падения. Результаты расчетов приведите в таблице листа ответов. Постройте графики полученных зависимостей.

1.4 Укажите, начиная с какого момента времени t^* движение капли можно считать равномерным. Считайте, что движение можно считать равномерным, если скорость отличается от установившейся скорости не более, чем на 5%. Укажите координату точки в этот момент времени x^* .

Часть 2. Реальный эксперимент.

В этой части работы Вам необходимо провести измерения с помощью прилагаемых фотографий, расположенных в листах ответов. Непосредственно на всех фотографиях, которые Вы используете, укажите стрелками (нарисуйте) те величины, которые Вы измеряли. Результаты измерений занесите в соответствующие таблицы. Обязательно приведите формулы, по которым проводятся расчеты.

2.1 Падение капель.

Для изучения падения капель была использована капельница, из которой через равные интервалы падают одинаковые капли воды.

На фото 1 приведена фотография падающих капель. Для определения их положений установлена вертикальная линейка. Так как капли движутся, то их изображение оказывается смазанным. Пунктирными линиями отмечены верхние x_k и нижние границы y_k изображения капель. Если при печати фотографий сами капли плохо видны, то пользуйтесь указанными границами. Нумерацию капель удобно начать с нуля. Верхнюю границу «нулевой капли» примите за начало отсчета.

2.1.1 Измерьте координаты верхних и нижних границ капель. Результаты измерений занесите в таблицу.

Обозначим τ - интервал времени между отрывами последовательных капель (считайте его постоянным). Обозначим Δt - время экспозиции фотографии (время, в течение которого проводится фотографирование). Предположим, что движение капель является равноускоренным с ускорением свободного падения $g = 10 \frac{M}{c^2}$. Фотография сделана, когда все капли (в т.ч. и «нулевая») имеют некоторую скорость. Начальную скорость нулевой капли обозначим V_0 (т.е. ее скорость в момент начала съемки).

2.1.2 Получите формулы, описывающие зависимости координат верхней x_k и нижней y_k границ капель от их номера k .

2.1.3 Придумайте такие функции $X_k(x_k, k)$ и $Y_k(y_k, k)$, чтобы их зависимость от номера капли была линейной. Постройте графики этих линеаризованных зависимостей.

2.1.4 По результатам измерений рассчитайте среднее время между отрывами капель τ . Оцените погрешность найденного значения.

2.1.5 Рассчитайте начальную скорость V_0 «нулевой» капли.

2.1.6 Рассчитайте время экспозиции Δt (время в течении которого проводилась съемка данной фотографии).

2.1.7 Используя фото 2, рассчитайте среднее время между отрывами капель, показанных на этом фото.

2.1.8 Используя все имеющиеся данные, рассчитайте время между отрывами капель τ . Оцените погрешность найденного значения.

2.2 Волны на воде.

На фото 3 приведено изображение волн на поверхности воды в неглубокой тарелке, образующихся при падении капель из капельницы. Интервал между падениями капель такой же, как в предыдущей части работы.

2.2.1 Используя фото 3, рассчитайте скорость распространения волн на поверхности воды.

Укажите, какие величины вы измеряли по фотографиям, результаты измерений приведите в таблице, для обработки результатов и расчета скорости рекомендуем представить результаты в графической форме.

2.3 Измерение дождя.

На фото 4 приведена фотография волн на поверхности лужи во время дождя. Считайте, что скорости волн на поверхности луж равны измеренной скорости волн в тарелке.

2.3.1 Используя приведенную фотографию, оцените интенсивность дождя: высоты слоя воды (в мм), который образуется на поверхности земли за 1 час.

Считайте, что диаметр каждой капли равен 1 мм. Фронтальный размер участка лужи на фото считайте равным 1 м.

Не забудьте указать, какие величины Вы измеряли, и привести формулы, по которым проведен расчет.

Решение

Младшая лига. Экспериментальный тур. Решения задач.

Часть 1. Компьютерный эксперимент.

1.1 Закон Ньютона для падающей капли

$$ma = mg - \beta v^2. \quad (1)$$

Находим установившуюся скорость из условия $a = 0$:

$$u = \sqrt{\frac{mg}{\beta}} \Rightarrow \beta = \frac{mg}{u^2}. \quad (2)$$

После подстановки в уравнение получаем требуемое уравнение

$$a = g \left(1 - \frac{v^2}{u^2} \right). \quad (3)$$

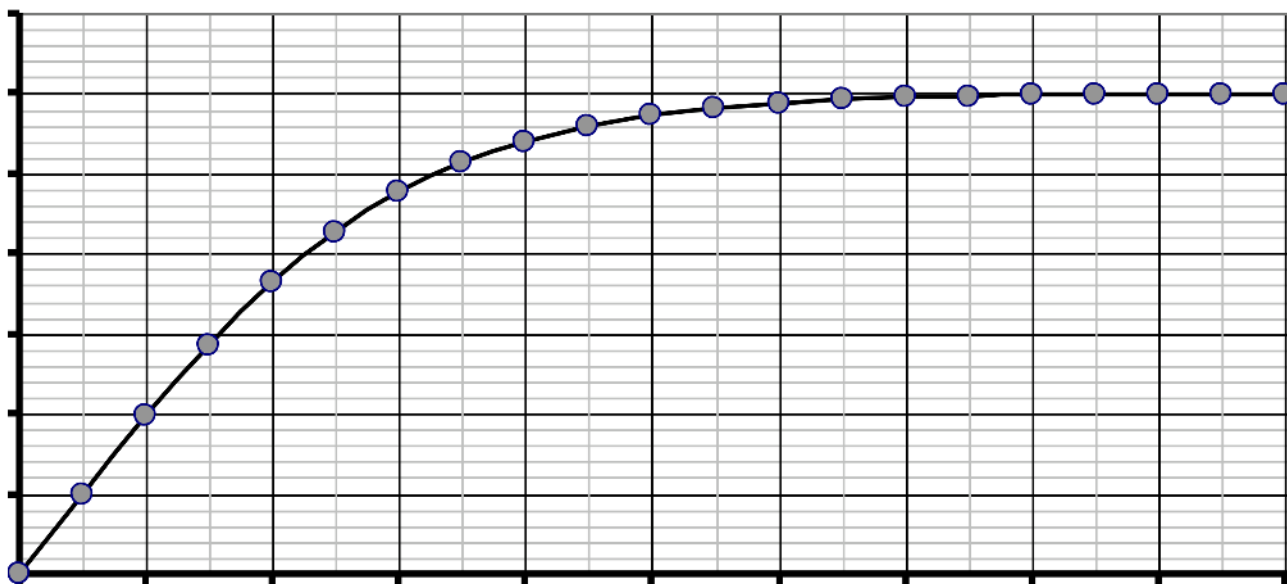
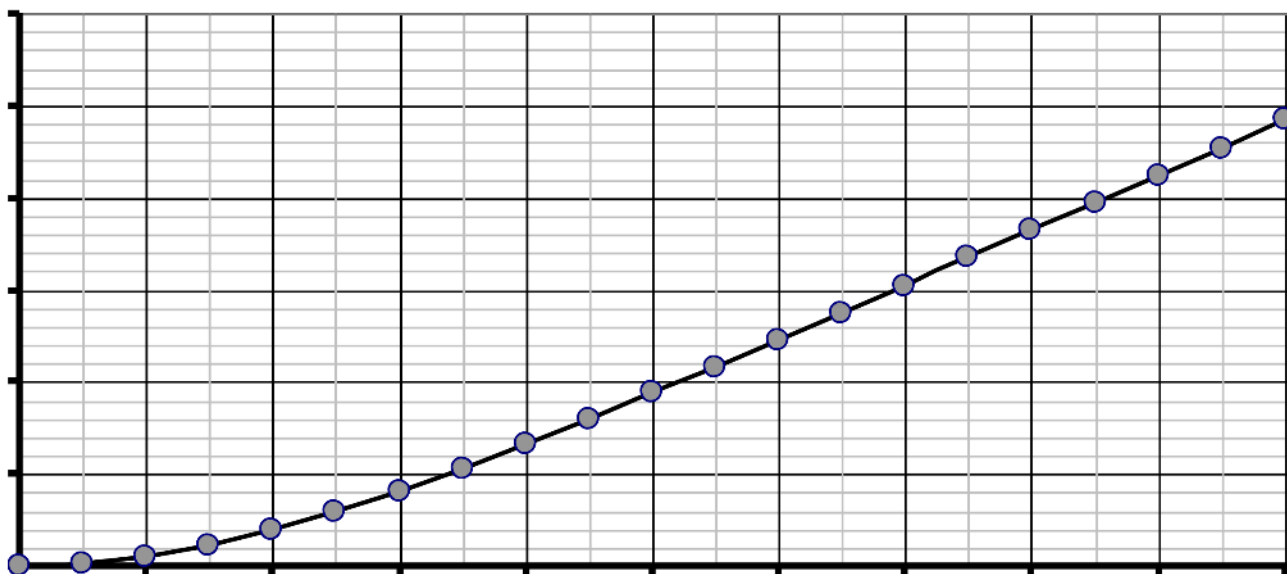
1.2 Рекуррентные формулы для последовательного расчета

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= g \left(1 - \frac{v_k^2}{u^2} \right) \\ v_{k+1} &= v_k + a_{k+1} \Delta t \\ x_{k+1} &= x_k + \frac{v_k + v_{k+1}}{2} \Delta t \end{aligned} \quad (4)$$

1.3 Результаты расчетов приведены в таблице 1.

Таблица 1.

t, c	$a, \text{м/с}^2$	$v, \text{м/с}$	$x, \text{м}$
0,00	10,00	0,00	0,00
0,05	10,00	0,50	0,01
0,10	9,72	0,99	0,05
0,15	8,92	1,43	0,11
0,20	7,72	1,82	0,19
0,25	6,33	2,13	0,29
0,30	4,94	2,38	0,40
0,35	3,70	2,57	0,53
0,40	2,68	2,70	0,66
0,45	1,90	2,80	0,80
0,50	1,32	2,86	0,94
0,55	0,90	2,91	1,08
0,60	0,61	2,94	1,23
0,65	0,41	2,96	1,37
0,70	0,28	2,97	1,52
0,75	0,19	2,98	1,67
0,80	0,13	2,99	1,82
0,85	0,08	2,99	1,97
0,90	0,06	2,99	2,12
0,95	0,04	3,00	2,27
1,00	0,02	3,00	2,42



1.4 По таблице находим:

$$\begin{aligned} t^* &= 0,50 \text{ s} \\ x^* &= 0,94 \text{ m} \end{aligned} \quad (5)$$

Часть 2. Реальный эксперимент.

2.1 Падение капель.

2.1.1 Результаты измерений приведены в таблице 2.

Таблица 2.

Номер капли	По линейке		X_k , см	y_k , см	$\frac{x_k}{k}$, см	$\frac{y_k - y_0}{k}$, см
0	7,5	10,9	0,0	3,4		
1	17,7	23,7	10,2	16,2	10,20	12,80
2	30,8	38,8	23,3	31,3	11,65	13,95
3	48,0	58,7	40,5	51,2	13,50	15,93

2.1.2 Формулы зависимости координат границ капель

$$x_k = (V_0\tau)k + \left(\frac{g\tau^2}{2}\right)k^2 \quad (6)$$

$$y_k = D + V_0(k\tau + \Delta t) + \frac{g}{2}(k\tau + \Delta t)^2, \quad (7)$$

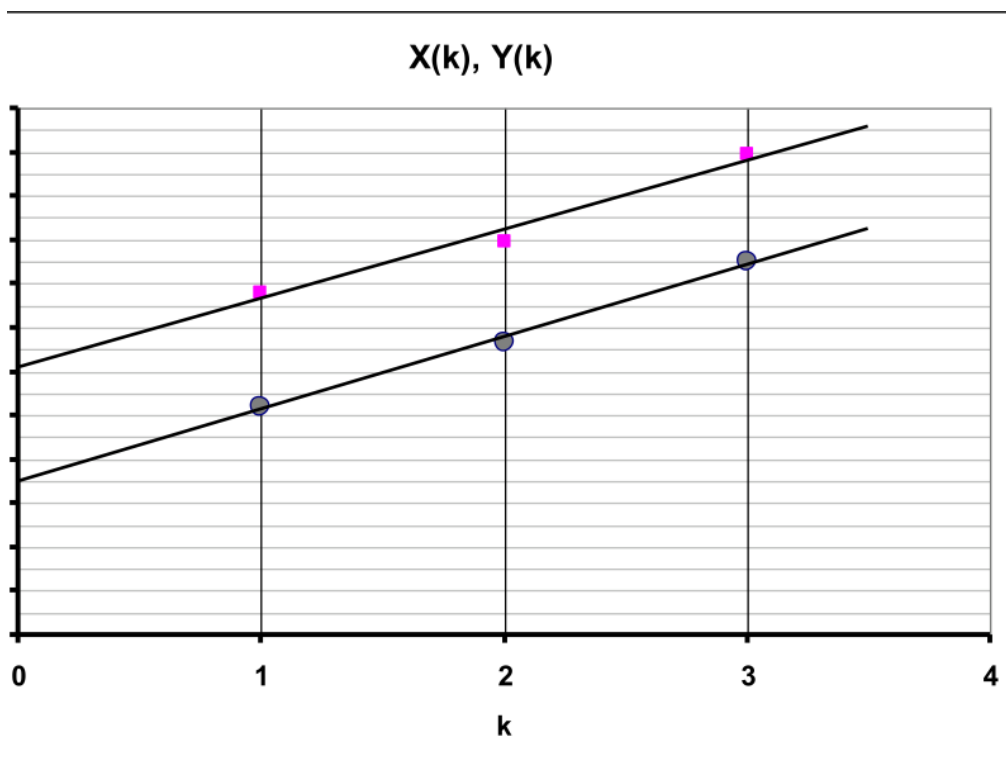
D - диаметр капли.

2.1.3 Оптимальная линеаризация

$$X_k = \frac{x_k}{k} = (V_0\tau) + \frac{g\tau^2}{2}k \quad (8)$$

$$Y_k = \frac{y_k - y_0}{k} = (V_0 + g\Delta t)\tau + \frac{g\tau^2}{2}k. \quad (9)$$

Результаты расчетов этих величин также приведены в таблице 2. Графики полученных зависимостей показаны ниже.



2.1.4 – 2.1.6 Параметры линейных зависимостей

$$X = a_X k + b_X Y = a_Y k + b_Y \quad (10)$$

Могут быть найдены графически, либо по МНК, их значения:

$$a_X = 1,65 \text{ см}, \quad b_X = 8,5 \text{ см}, \quad a_Y = 1,57 \text{ см}, \quad b_Y = 11,1 \text{ см} \quad (11)$$

Сравнивая с теоретическими формулами (8)-(9), находим нужные величины:

$$a_X = \frac{g\tau^2}{2} \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{2a_X}{g}} = 0,057 \text{ с} \quad (12)$$

$$b_X = V_0\tau \Rightarrow V_0 = \frac{b_X}{\tau} = 1,5 \frac{\text{м}}{\text{с}} \quad (13)$$

$$b_Y - b_X = g\tau\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{b_Y - b_X}{g\tau} = 0,045 \text{ с} \quad (14)$$

Строгий расчет погрешности интервала между каплями дает значение $\Delta\tau = 6 \cdot 10^{-3} \text{ с}$.

2.1.7 Аналогичный расчет величины τ по фото 2 дает значение $\tau = 0,079 \text{ с}$

2.1.8 Усреднение двух значений, полученных по разным снимкам, приводит к результату

$$\tau = (0,07 \pm 0,02) \text{ с}. \quad (15)$$

2.2 Волны на воде.

По фотографии измеряем с помощью линейки координаты x_k волновых фронтов. Результаты приведены в таблице 3 (координаты в см на фото). Для усреднения строим эту зависимость.



Таблица 3.

k	x_k , см
1	1
2	2,1
3	2,8
4	4,1
5	5,4
6	6,5

Коэффициент наклона этого графика равен

$$a = 1,1 \text{ см} \quad (16)$$

С учетом масштабного множителя определяем расстояние между соседними гребнями (в «реальных» сантиметрах)

$$\lambda = 1,4 \text{ см} \quad (17)$$

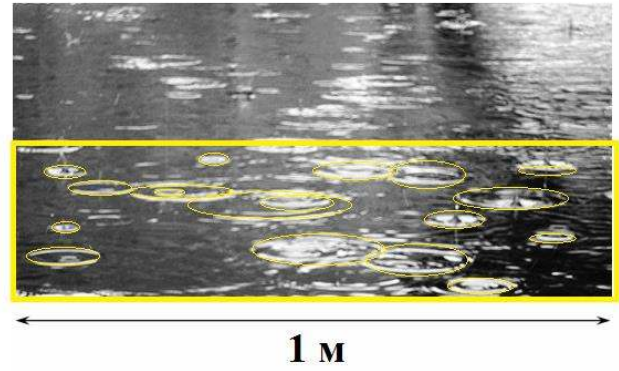
Это расстояние проходит волна за промежуток между падениями капель. Поэтому скорость волны

$$v = \frac{\lambda}{\tau} = 20 \frac{\text{см}}{\text{с}}. \quad (20)$$

2.3 Измерение дождя.

На фотографии выделяем участок площадью в 1 м^2 (с учетом разности масштабов по горизонтали и вертикали).

Измеряем диаметры волн от капель, упавших на этот участок D_i . По измеренным диаметрам волн и скорости их распространения рассчитываем времена падения капель (до фотографирования)



$$t_i = \frac{D_i}{2v}. \quad (21)$$

Упорядочиваем их в порядке возрастания и находим интервалы времени между падениями капель $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Рассчитываем среднее время между падениями капель на выделенный участок. Результаты приведены в таблице 4.

Таблица 4.

<i>i</i>	D_i, см	t_i, с	Δt_i
1	0,6	0,111	
2	0,7	0,130	0,019
3	0,8	0,148	0,019
4	0,9	0,167	0,019
5	1,1	0,204	0,037
6	1,4	0,259	0,056
7	1,5	0,278	0,019
8	1,6	0,296	0,019
9	1,6	0,296	0,000
10	1,7	0,315	0,019
11	1,8	0,333	0,019
12	1,9	0,352	0,019
13	2,0	0,370	0,019
14	2,3	0,426	0,056
15	2,4	0,444	0,019
16	2,6	0,481	0,037
17	3,0	0,556	0,074
18	3,7	0,685	0,130

Среднее время между падениями капель равно $\langle \Delta t \rangle = 0,034 \text{ с}$, Тогда число капель за 1 час равно $N = \frac{t}{\langle \Delta t \rangle} = \frac{3600}{0,034} = 1,06 \cdot 10^5$ Их общий объем $V = N \cdot \frac{1}{6} \pi d^3 = 5,6 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$ Следовательно, высота слоя воды, которую «накапает» дождь равна $h = \frac{V}{S} = 5,6 \cdot 10^{-2} \text{ мм}$.