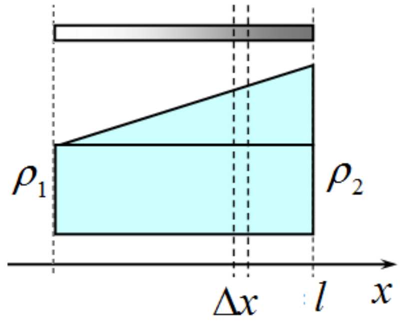
Задание 9-1. Неоднородная разминка.

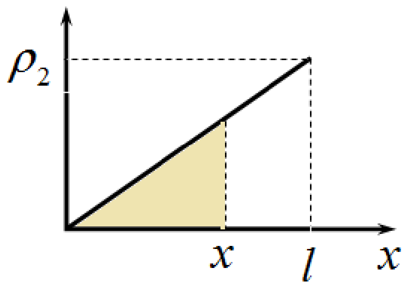
Задача 1.1



Для определения центра масс неоднородного стержня рассмотрим однородную трапецию с длинами оснований численно равными $C\rho_2$ и $C\rho_2$ и высотой l. Если мы выделим малый участок (полоску) шириной Δx, то масса этой полоски будет равна (точнее, пропорциональна) массе такого же отрезка рассматриваемого неоднородного стержня. Поэтому координаты x_C центров масс стержня и трапециевидной пластинки будут одинаковы. Рассчитать координату центра масс пластинки можно традиционным способом.
Разобьем трапецию на прямоугольник и треугольник. Масса прямоугольника равна $m_1 = C\rho_1 l$, координата его центра масс $x_1 = \frac{l}{2}$. Масса треугольника $m_2 = \frac{C}{2}(\rho_2 - \rho_1)l$, координата его центра масс $x_2 = \frac{l}{3}$. Тогда координата центра масс трапеции задается формулой

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{\rho_2 + 2\rho_1}{3(\rho_2 + \rho_1)} l .$$

Задача 1.2



На рисунке показана зависимость удельного сопротивления стержня от координаты x. Эта зависимость описывается функцией:

$$\rho(x) = \rho_0 \frac{x}{l} . \qquad (1)$$

Понятно, что площадь под графиком этой зависимости пропорциональна электрическому сопротивлению участка стержня. Поэтому сопротивление участка стержня от нуля до некоторой точки с координатой x будет равно:

$$R(x) = \frac{1}{2}\rho_0 \frac{x^2}{lS} . \qquad (2)$$

Где S - постоянная площадь поперечного сечения стержня.
Сопротивление всего стержня равно

$$R_0 = \frac{1}{2}\frac{\rho_0 l}{S} . \qquad (3)$$

Поэтому сила тока, протекающего по стержню равна

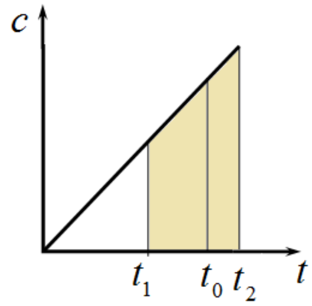
$$I = \frac{U_0}{R_0} = \frac{2S}{\rho_0 l} U_0 . \qquad (4)$$

Следовательно, искомое напряжение будет описываться формулой:

$$U(x) = I_0 R(x) = U_0 \frac{x^2}{l^2} . \qquad (5)$$

Задача 1.3

Построим график зависимости удельной теплоемкости стержня от координаты. Площадь под этим графиком в интервале температур Δt пропорциональна количеству теплоты, которое требуется, что бы нагреть брусок на величину Δt в том же диапазоне температур. Так как теплообмен между брусками происходит без потерь, то для нахождения установившейся температуры необходимо трапецию меду значениями t_1 и t_2 разбить на две равновеликие части. Легко заметить, что площадь треугольника под данным графиком в диапазоне от нуля до произвольного значения t пропорциональна t^2. Это позволяет сразу найти значение t_0 , разбивающее трапецию на две части равных площадей:



$$t_0^2 - t_1^2 = t_2^2 - t_0^2 \quad \Rightarrow \quad t_0 = \sqrt{\frac{t_1^2 + t_2^2}{2}} = 15{,}8°C \ .$$