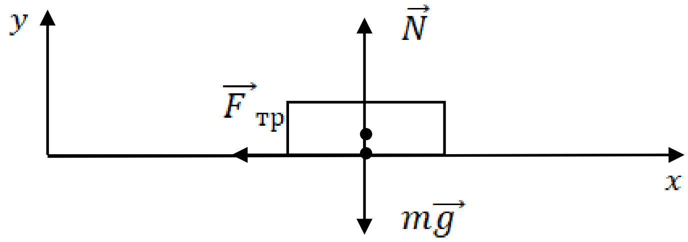
Задание 3. «Блинчики» на воде.

Часть 1. Отскок от земли



1.1. При ударе на камень действуют три силы: тяжести $m\vec{g}$, нормальной реакции $\vec{N}$ и трения $\vec{F}_{тр}$. Сила трения в данном случае является силой трения скольжения и определяется по закону Кулона-Амонтона: $F_{тр} = \mu N$.
На основании второго закона Ньютона для процесса соударения можем записать следующую систему:

$$\begin{gathered}\frac{\Delta p_y}{\Delta t} = N - mg \\ \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = -\mu N\end{gathered}. \qquad (1)$$

Учитывая упругость удара и пренебрегая импульсом силы тяжести перепишем (1) в виде

$$\begin{gathered}2mv_0 \sin\alpha = N\Delta t \\ m(v_0\cos\alpha - v'_x) = \mu N\Delta t\end{gathered}, \qquad (2)$$

где v' – скорость тела после удара. Избавляясь от $N\Delta t$, получим $v'_x = v_0(1-2\mu\sin\alpha)$.
Теперь не составляет труда найти модуль конечной скорости и угол β:

$$\begin{gathered}v' = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y} = v_0(1-2\mu\sin\alpha) \\ \beta = \mathrm{arctg}(\frac{v'_y}{v'_x}) = \mathrm{arctg}(\frac{\mathrm{tg}\alpha}{1-2\mu\mathrm{tg}\alpha})\end{gathered}. \qquad (3)$$

Отметим, что при $\mu > \frac{\mathrm{ctg}\alpha}{2}$ шарик отскочит вертикально ($\beta = \frac{\pi}{2}$) с конечной скоростью $v' = v_0\sin\alpha$.

Часть 2. Отскок от воды

2.1. Проекция результирующей силы на ось Z, действующей на камень, определяется соотношением

$$F_z = -Mg + \rho v^2 S(C_n\cos\beta - C_\tau\sin\beta). \qquad (4)$$

Воспользуемся приближениями, указанными в условии задачи. Поскольку скорость камня меняется незначительно, в (4) заменим v на v_0. Для удобства введём обозначение

$C_z = C_n \cos\beta - C_\tau \sin\beta$. Площадь поверхности камня, соприкасающаяся с водой, с учётом указанного в условии приближения, определяется уравнением

$$S = a|z|. \tag{5}$$

С учётом указанных замечаний перепишем (4) в виде (6):

$$F_z = -Mg + \rho C_z {v_0}^2 a|z|. \tag{6}$$

Воспользовавшись вторым законом Ньютона, получим

$$Ma_z = -Mg + \rho C_z {v_0}^2 a|z|. \tag{7}$$

Раскрыв модуль ($|z| = -z$) и разделив уравнение (7) на массу камня, получим уравнение движения

$$a_z = -g - \frac{\rho C_z {v_0}^2 a}{M} z. \tag{8}$$

Проекция результирующей силы на ось X, действующей на камень, определяется соотношением

$$F_x = -\rho v^2 S(C_n \sin\beta + C_\tau \cos\alpha). \tag{9}$$

Сделав пренебрежения, аналогичные п. 2.1 и введя обозначение $C_x = C_n \sin\beta + C_\tau \cos\beta$, пользуясь формулой (5) получим

$$Ma_x = \rho C_x {v_0}^2 az. \tag{10}$$

2.2. Сравнивая проекции сил сопротивления воды в (7) и (10), получим $F_{\text{в x}} = -\frac{C_x}{C_z} F_{\text{в z}}$. Таким образом

$$\mu = \frac{C_x}{C_z} = \frac{C_n \sin\beta + C_\tau \cos\beta}{C_n \cos\beta - C_\tau \sin\beta}.$$

2.3. Перепишем уравнение (8) в виде

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_0^2 z = -g, \tag{11}$$

где $\omega_0^2 = \frac{\rho C_z {v_0}^2 a}{M}$. Очевидно (11) – уравнение гармонических колебаний с циклической частотой ω_0, при этом положение равновесия смещено относительно $z = 0$.

Будем искать решение уравнения (11) в виде (12):

$$z(t) = z_0 + A\cos(\omega_0 t + \varphi), \tag{12}$$

где z_0 имеет смысл координаты положения равновесия, а A – амплитуды колебаний.
Первая и вторая производные по времени от (12) имеют смысл вертикальных компонент скорости и ускорения камня соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= -A\omega_0{}^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned}.$$

Подставим $z(t)$ в виде (12) в уравнение (11):

$$-A\omega_0{}^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) + z_0\omega_0{}^2 + A\omega_0{}^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -g\,,$$

откуда $z_0 = -\frac{g}{\omega_0^2}$.

Для нахождения амплитуды и начальной фазы колебаний воспользуемся начальными условиями: $z(0) = 0$, $\frac{dz}{dt}|_{t=0} = -v_0 \sin\alpha$:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{g}{\omega_0^2} + A\cos\varphi \\ -v_0 \sin\alpha &= -A\omega_0 \sin\varphi \end{aligned},$$

откуда

$$\begin{aligned} A &= \frac{g}{\omega_0^2}\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2}} \\ \varphi &= \mathrm{arctg}\left(\frac{\omega_0 v_0 \sin\alpha}{g}\right) \end{aligned}. \qquad (13)$$

Окончательно

$$z(t) = -\frac{g}{\omega_0^2} + \frac{g}{\omega_0^2}\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2}} \cos\left(\omega_0 t + \mathrm{arctg}\left(\frac{\omega_0 v_0 \sin\alpha}{g}\right)\right). \qquad (14)$$

2.4. Время соударения t_0 является корнем уравнения $z(t_0) = 0$. Одним из корней данного уравнения является начальный момент времени $t = 0$, при котором фаза колебаний равна начальной фазе φ. Ясно, что и в момент времени t_0 косинус в выражении (14) будет принимать то же значение, что и в начальный момент. Тогда фаза колебаний в момент времени t_0 равна $2\pi - \varphi$:

$$\omega_0 t_0 + \varphi = 2\pi - \varphi$$

Из последнего уравнения находим выражение для времени соударения:

$$t_0 = \frac{2\pi - 2\varphi}{\omega_0}. \qquad (15)$$

2.5. Для указанных в условии параметров $\omega_0 \approx 4{,}93 \cdot 10^2$ с$^{-1}$, $\varphi \approx 89{,}3^\circ$. Близость начальной фазе к 90° позволяет нам утверждать, что $z_0 \ll A$ и движение камня в воде происходит приблизительно половину периода колебаний, т.е.

$$t_0 \approx \frac{\pi}{\omega_0} \approx 6{,}4 \text{ мс}. \tag{16}$$

Расстояние l_0 с учётом малого изменения скорости камня находится как

$$l_0 \approx v_0 \cos\alpha t_0 \approx 6{,}3 \text{ см}. \tag{17}$$

2.6. Проекция результирующей силы на ось X, действующей на камень, определяется соотношением (10). Подставляя сюда зависимость $z(t)$ из (12), получим

$$F_x = \rho {v_0}^2 a C_x \left(-\frac{g}{\omega_0^2} + \frac{g}{\omega_0^2}\sqrt{1+\frac{\omega_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2}} \cos\left(\omega_0 t + \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega_0 v_0 \sin\alpha}{g}\right)\right)\right). \tag{18}$$

Заметим, что для указанных параметров $z_0 \ll A$ и $\varphi \approx 90^\circ$, поэтому

$$F_x = -\frac{\rho g {v_0}^2 a C_x}{\omega_0^2}\sqrt{1+\frac{\omega_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2}} \sin\omega_0 t .$$

Тогда уравнение движения камня вдоль оси X с учётом выражения для ω_0 имеет вид

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{C_x}{C_z} Mg\sqrt{1+\frac{\omega_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2}} \sin\omega_0 t . \tag{19}$$

Для вычисления средней силы воспользуемся подсказкой в условии:

$$\langle F_x \rangle = -\frac{C_x}{C_z} Mg\sqrt{1+\frac{\omega_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2}} \langle \sin\omega_0 t\rangle_{t\in[0,\frac{\pi}{\omega_0}]} = -\frac{2C_x}{\pi C_z} Mg\sqrt{1+\frac{\omega_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2}} \approx -77{,}8 \text{ Н}.$$

2.7. Камень может не отскочить от воды по двум причинам: в процессе соударения камень полностью опустится под воду, после чего наша модель перестаёт адекватно описывать процесс соударения. Камень при этом утонет. Вторая причина – полная потеря горизонтальной компоненты импульса в процессе удара. Запишем данные условия в виде уравнений:

$$\begin{aligned} |z_{\max}| &< \frac{S_0}{a} \\ |\langle F_x \rangle| t_0 &< M v_0 \cos\alpha \end{aligned} . \tag{20}$$

Для параметров, приведенных в условии $\left|z_{\min}\right| = 3,5\,\text{мм}$, $\dfrac{S_0}{a} = 1,7\text{ см}$, $\left|\langle F_x \rangle\right| t_0 = 0,50\text{ кг}\cdot\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$, $Mv_0\cos\alpha = 0,98\text{ кг}\cdot\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$. Таким образом, оба условия выполняются и камень отскакивает от воды.

Горизонтальную компоненту скорости после определяется как

$$v'_x = \frac{Mv_0\cos\alpha + \langle F_x \rangle t_0}{M} \approx 4,89\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Поскольку вертикальная компонента скорости не меняется по модулю, нетрудно найти конечную скорость и угол отскока γ:

$$\begin{aligned} v' &= \sqrt{v'^2_x + v'^2_y} = \sqrt{v'^2_x + (v_0\sin\alpha)^2} \approx 5,19\ \frac{\text{м}}{\text{с}} \\ \gamma &= \operatorname{arctg}\left(\frac{v_0\sin\alpha}{v'_x}\right) \approx 19,6^\circ \end{aligned}. \qquad (21)$$

2.8. Вычислим коэффициент μ из п. 2.2. и подставим в формулу (3), определяющую конечную скорость и угол отскока тела от твёрдой поверхности:

$$\mu = \frac{C_n\sin\beta + C_\tau\cos\beta}{C_n\cos\beta - C_\tau\sin\beta} \approx 1,43,$$

$$\begin{aligned} v' &= v_0(1 - 2\mu\sin\alpha) \approx 5,03\ \frac{\text{м}}{\text{с}} \\ \gamma &= \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 - 2\mu\operatorname{tg}\alpha}\right) \approx 19,6^\circ \end{aligned}. \qquad (22)$$

Сравнивая значения (21) и (22) можно заключить, что в данной модели вода действительно ведёт себя как твёрдое тело.