Задача 2. Гитарная струна.

Часть 1. Бегущие и стоячие волны на струне.

1.1 Функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, описывающие волны, распространяющиеся в положительном и отрицательном направлении оси x, имеют вид

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= U_0\cos(\omega t - kx) \\ u_2(x,t) &= U_0\cos(\omega t + kx) \end{aligned}, \tag{1}$$

где $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ - волновое число.

1.2 Результатом сложения этих волн является волна, описываемая функцией

$$u(x,t) = U_0\cos(\omega t - kx) + U_0\cos(\omega t + kx) = 2U_0\cos(\omega t)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right). \tag{2}$$

Эта функция описывает стоячую волну.

1.3 Скорость волны может быть представлена в виде

$$c = \lambda\nu = \frac{\lambda\omega}{2\pi}. \tag{3}$$

Часть 2. Колебания закрепленной струны.

2.1 Функция, описывающая данный тип колебаний имеет вид

$$u(x,t) = U_0\cos(\omega t)\cos\left(\frac{\pi}{2a}x\right). \tag{4}$$

2.2 Если зависимость смещения точек струны от времени имеет вид (4), то зависимость их скоростей от времени задается функцией

$$v(x,t) = -U_0\omega\sin(\omega t)\cos\left(\frac{\pi}{2a}x\right) = v_0\cos\left(\frac{\pi}{2a}x\right). \tag{5}$$

Выделим на струне небольшой участок длиной Δx, положение которого определяется координатой x. Кинетическая энергия этой малой части струны равна

$$\Delta E = \frac{\rho\Delta x}{2}v^2(x) = \frac{\rho\Delta x}{2}v_0^2\cos^2\left(\frac{\pi}{2a}x\right). \tag{6}$$

Кинетическая энергия всей струны рассчитывается как сумма кинетических энергий всех ее участков:

$$E = \sum_i \frac{\rho\Delta x}{2}v_0^2\cos^2\left(\frac{\pi}{2a}x_i\right) = \frac{\rho v_0^2}{2}\sum_i \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(2\frac{\pi}{2a}x_i\right)\right)\Delta x = \frac{\rho v_0^2}{2}a. \tag{7}$$

При вычислении суммы учтено, что сумма длин всех участков равна длине струны $\sum\limits_i \Delta x = 2a$. Второе слагаемое обращается в ноль, так как в рассматриваемом интервале x косинус принимает как положительные, так и отрицательные значения.

2.3 Так как сила изменением силы натяжения струны рекомендовано пренебречь, то потенциальная энергия изогнутой струны равна работе по растяжению струны:

$$W = T\Delta l = T\,. \tag{8}$$

Используя формулу для длины струны, приведенную в «Математической подсказке», получаем выражение для потенциальной энергии струны

$$W = T\Delta l = \frac{\pi^2 T}{8a} u_0^2\,. \tag{9}$$

2.4 Запишем уравнения закона сохранения механической энергии для всей струны

$$\frac{\rho a}{2} v_0^2 + \frac{\pi^2 T}{8a} u_0^2 = const. \tag{10}$$

Это уравнение есть уравнение гармонических колебаний с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{\pi^2 T}{8a}}{\frac{\rho a}{2}}} = \frac{\pi}{2a}\sqrt{\frac{T}{\rho}}\,. \tag{11}$$

2.5 Рассматриваемое колебание можно рассматривать как стоячую волну, описываемую функцией (4). Сравнивая эту функцию с функцией (2), находим, что данное колебание есть сумма двух бегущих волн с длиной волны

$$\lambda = 4a\ . \tag{12}$$

Поэтому можно использовать формулу (3) для скорости бегущей волны, в результате чего получим

$$c = \frac{\lambda\omega}{2\pi} = \frac{4a \cdot \frac{\pi}{2a}\sqrt{\frac{T}{\rho}}}{2\pi} = \sqrt{\frac{T}{\rho}}\,. \tag{13}$$