Задание 11-3. Шар в потоке.

Введение. Метод размерностей в физике.

0.1 Искомая зависимость имеет вид:

$$T = Cm^{\alpha}k^{\beta}g^{\gamma} \tag{1}$$

Выразим размерность коэффициента жесткости через основные единицы системы СИ, используя закон Гука:

$$F = kx\ . \tag{2}$$

Из этой формулы следует, что размерность этого коэффициента есть:

$$k = \frac{F}{x}, \quad \Rightarrow \quad [k] = \frac{[F]}{[x]} = \frac{Н}{м} = \frac{кг \cdot \frac{м}{с^2}}{м} = \frac{кг}{с^2}\ . \tag{3}$$

На основании формулы (1) записываем условия размерностей:

$$[T] = [m]^{\alpha}[k]^{\beta}[g]^{\gamma} \quad \Rightarrow \quad с^1 = кг^{\alpha}\left(\frac{кг}{с^2}\right)^{\beta}\left(\frac{м}{с^2}\right)^{\gamma} = кг^{\alpha+\beta} \cdot м^{\gamma} \cdot с^{-2\beta-2\gamma} \tag{4}$$

Приравниваем показатели степеней и получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} &кг: \quad 0 = \alpha + \beta \\ &м: \quad 0 = \gamma \\ &с: \quad 1 = -2\beta - 2\gamma \end{aligned} \ . \tag{5}$$

Решаем систему и находим:

$$\gamma = 0, \quad \beta = -\frac{1}{2}, \quad \alpha = +\frac{1}{2}. \tag{8}$$

Окончательно получаем:

$$T = C\sqrt{\frac{m}{k}}\ . \tag{9}$$

Заметим, что период колебаний от ускорения свободного падения не зависит. А если подумать, почему должна быть такая зависимость?

Часть 1. «Вязкое» лобовое сопротивление.

1.1 Найдем размерность вязкости, используя закон Ньютона (5):

$$[\eta] = \frac{[F]}{[S]\left[\frac{v}{z}\right]} = \frac{Н}{м^2 \cdot \frac{м}{с} \cdot \frac{1}{м}} = \frac{Н}{м^2}с = \frac{\frac{кг \cdot м}{с^2} \cdot с}{м^2} = \frac{кг}{м \cdot с} \tag{10}$$

Формула для силы сопротивления записана в виде

$$F = C\eta^{\alpha}r^{\beta}v^{\gamma}\ .$$

Не сложно подставить размерности всех величин, приравнять показатели степеней, получить систему уравнений, и решить ее. Важно, что в данном случае все размерности выражаются через метр, килограмм, секунду; поэтому получается система 3 уравнений с тремя неизвестными α, β, γ, которая имеет однозначное решение:

$$\alpha = \beta = \gamma = 1. \tag{11}$$

Поэтому зависимость сопротивления от скорости и радиуса имеет вид:

$$F = C\eta rv\,. \tag{12}$$

1.2 При опускании шарика в вязкой среде сила лобового сопротивления уравновешивает силы тяжести. Учитывая, что масса шарика пропорциональная его объему получим

$$mg = F \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 g = C\eta rv\,. \tag{13}$$

Из этой формулы следует, что скорость падения пропорциональна квадрату радиуса шарика. Поэтому при увеличении радиуса в 2 раза его скорость возрастает в 4 раза:

$$v_2 = 4v_1. \tag{14}$$

Часть 2. «Динамическое» сопротивление.

2.1 Формула для сопротивления должна имеет вид

$$F = C\rho^\alpha r^\beta v^\gamma\,.$$

Далее поступаем по установленному стандарту: выражаем размерности через метр, килограмм, секунду; приравниваем показатели степеней, получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными, и решаем ее. Ответ:

$$\alpha = 1;\;\; \beta = 2;\;\; \gamma = 2\;\;. \tag{15}$$

Поэтому искомая зависимость имеет вид

$$F = C\rho v^2 r^2\,. \tag{16}$$

2.2 Сила тяжести, пропорциональная кубу радиуса, поэтому квадрат скорости пропорционален радиусу шарика. Следовательно, скорость пропорциональная корню из радиуса, следовательно:

$$v_2 = \sqrt{2}\,v_1\,. \tag{17}$$

Часть 3. Общий случай: действуют обе причины.

3.1 Используя формулу

$$F = C\rho^\alpha r^\beta v^\gamma \eta^\delta\,,$$

Записываем условия совпадения размерностей:

$$H = \frac{кг \cdot м}{c^2} = \left(\frac{кг}{м^3}\right)^\alpha м^\beta \left(\frac{м}{c}\right)^\gamma \left(\frac{кг}{м \cdot c}\right)^\delta. \tag{18}$$

Из этого выражения следует система уравнений для показателей степеней:

$$\begin{aligned} &кг: \quad \alpha + \delta = 1 \\ &м: \quad -3\alpha + \beta + \gamma - \delta = 1. \\ &c: \quad -\gamma - \delta = -2 \end{aligned} \tag{19}$$

Теперь можем выразить три неизвестных через четвертую - δ. Тогда получаем:

$$\alpha = 1 - \delta; \quad \beta = 2 - \delta; \quad \gamma = 2 - \delta \tag{20}$$

Следовательно, искомая формула получаем вид

$$F = C\rho v^2 r^2 \left(\frac{\rho r v}{\eta}\right)^{\delta}. \tag{21}$$

3.2 Так как степень δ может быть любой, то последнее выражение можно обобщить

$$F = C(\mathrm{Re})\rho v^2 r^2. \tag{22}$$

Где $C(\mathrm{Re})$ - произвольная функция от безразмерного параметра

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho r v}{\eta}. \tag{23}$$

который и называется числом Рейнольдса, а коэффициент $C(\mathrm{Re})$ можно назвать коэффициентом лобового сопротивления.

Часть 4. Экспериментальные измерения.

4.1 Сила лобового сопротивления описывается формулой (22), правда, коэффициент $C(\mathrm{Re})$ неизвестен. Само число Рейнольдса подсчитать не сложно, но какова зависимость коэффициента лобового сопротивления от числа Рейнольдса? Попробуем воспользоваться неявной подсказкой про линейность неизвестной функции. Для этого для тех случаев, когда сила сопротивления и все параметры известны, посчитаем числа Рейнольдса и рассчитаем коэффициент лобового сопротивления по формуле

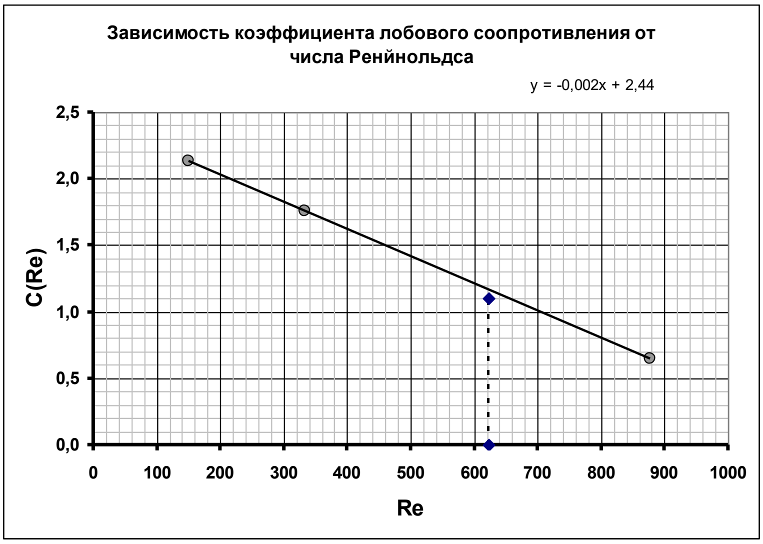
$$C = \frac{f}{\rho v^2 r^2}. \tag{24}$$

Результаты этих расчетов представлены в Таблице 1.

Таблица 1.

	$\eta, Па\cdot с$	$\rho, \frac{кг}{м^3}$	$r, м$	$v, \frac{м}{с}$	$F, Н$	Re	$C(\mathrm{Re})$
воздух	$1{,}8\cdot10^{-4}$	1,20	$1{,}0\cdot10^{-3}$	5,0	$1{,}66\cdot10^{-4}$	333	1,6
вода	$1{,}14\cdot10^{-3}$	$1{,}0\cdot10^{3}$	$1{,}0\cdot10^{-3}$	1,0	$2{,}04\cdot10^{-3}$	877	0,64
оливковое масло	$8{,}4\cdot10^{-2}$	$1{,}26\cdot10^{3}$	$1{,}0\cdot10^{-2}$	1,0	$8{,}45\cdot10^{-1}$	150	2,0
глицерин	1,48	$0{,}92\cdot10^{3}$	$1{,}0\cdot10^{-1}$	10,0	**?**	622	

Теперь построим график зависимости коэффициента лобового сопротивления от числа Рейнольдса (по трем точкам).



Видим, что действительно в данном диапазоне эта зависимость действительно близка к линейной! По этому графику находим значения коэффициента лобового сопротивления для $\mathrm{Re} = 622$: его примерное значение $C \approx 1{,}1$. Наконец, по формуле (22) находим значение силы, действующей на шарик в глицерине:

$$F \approx 3.2 \cdot 10^3 H \ . \qquad (25)$$