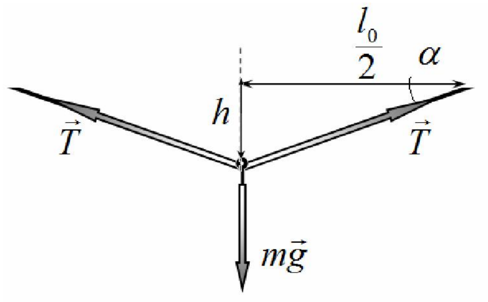
Решения задач. 10 класс

Задача 10-1. Упругий жгут

Часть 1. Провисание шнура

1.1 На рисунке показаны силы, действующие на точку крепления груза. Сила натяжения жгута обозначена $\vec{T}$. Условие равновесия в проекции на вертикальную ось выражается уравнением



$$mg = 2T\sin\alpha. \qquad (1)$$

Силу упругости жгута также можно выразить из закона Гука

$$T = kx = k\left(\frac{l_0}{2\cos\alpha} - \frac{l_0}{2}\right) = \frac{kl_0}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) \qquad (2)$$

Из этих выражений получаем уравнение для определения угла α:

$$mg = 2\frac{kl_0}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}\sin\alpha = \frac{mg}{kl_0}. \qquad (3)$$

Это уравнение может быть сведено к алгебраическому уравнению степени, большей, чем два. Поэтому для его решения проще воспользоваться приближением малых углов. В этом приближении (с учетом формул, приведенных в условии задачи) левую часть уравнения преобразуем к виду:

$$\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}\sin\alpha \approx \frac{1-\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)}{1-\frac{\alpha^2}{2}}\alpha \approx \frac{\alpha^3}{2}$$

Тогда из уравнения (3) следует, что угол отклонения жгута от горизонтали задается формулой

$$\alpha = \sqrt[3]{2\frac{mg}{kl_0}} \qquad (4)$$

А провисание жгута оказывается равным

$$\boxed{h = \frac{l_0}{2}\operatorname{tg}\alpha \approx \frac{l_0}{2}\alpha = \frac{l_0}{2}\sqrt[3]{2\frac{mg}{kl_0}}}. \qquad (5)$$

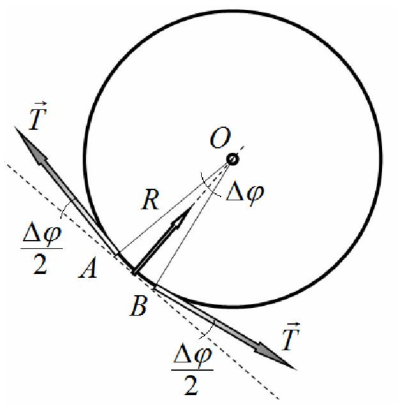
1.2 Жгут разорвется, если сила его натяжения станет T (формула (1)) равной максимальной силе F_{max}. В формулах (1)-(2) воспользуемся приближением малых углов и решим полученную систему уравнений относительно массы груза, а затем вместо произвольной силы натяжения подставим ее предельное значение:

$$\begin{cases} mg = 2T\sin\alpha \\ T = \frac{kl_0}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mg = 2T\alpha \\ T = \frac{kl_0}{2}\frac{\alpha^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (mg)^2 = 4T^2\alpha^2 \\ T = \frac{kl_0}{2}\frac{\alpha^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{(mg)^2}{T} = \frac{16T^2}{kl_0}$$

Откуда следует окончательный результат:

$$\boxed{m_{max} = \frac{4}{g}\sqrt{\frac{F_{max}^3}{kl_0}}} \qquad (6)$$

Часть 2. Вращающийся жгут



2.1 Выделим мысленно на кольце небольшой участок AB, видимый из центра кольца O под малым углом $\Delta\varphi$. Он движется по окружности с центростремительным ускорением

$$a = \omega^2 R. \tag{7}$$

Это ускорение ему сообщают силы упругости кольца T, приложенные к концам выделенного участка.

Запишем уравнение второго закона Ньютона для выделенного участка кольца в проекции на радиальное направление (с учетом малости угла $\Delta\varphi$)

$$\Delta m \omega^2 R = 2T\frac{\Delta\varphi}{2}. \tag{8}$$

Здесь $\Delta m = \frac{m_0}{2\pi}\Delta\varphi$ - масса выделенного участка. Заметим, что это выражение для массы не зависит от того, растянуто кольцо, или нет.

Подставляя это выражение для массы участка, получим выражение для силы натяжения кольца

$$T = \frac{m_0}{2\pi}\omega^2 R. \tag{9}$$

Это выражение не является окончательным ответом, так как в нем остается неизвестным радиус кольца, который увеличивается по мере раскручивания. Поэтому запишем формулу для силы натяжения, используя закон Гука:

$$T = k(2\pi R - l_0) \tag{10}$$

Решая совместно уравнения (9)-(10) относительно силы натяжения T, получим следующую формулу:

$$\boxed{T = \frac{k l_0}{\frac{4\pi^2 k}{m_0\omega^2} - 1}} \tag{11}$$

Эта формула справедлива только при $\frac{4\pi^2 k}{m_0\omega^2} - 1 > 0$, или при

$$\tilde{\omega}_1 < 2\pi\sqrt{\frac{k}{m_0}} \tag{12}$$

При больших угловых скоростях кольцо начнет расширяться вплоть до разрыва, так как силы упругости не в состоянии обеспечить нужное центростремительное ускорение всем частям кольца.

2.2 Итак, первое условие разрыва кольца – нарушение неравенства (12).

Считая, что неравенство (12) выполняется, а сила упругости, определяемая формулой (11) достигла максимального значения F_{max}, выразим из (12) угловую скорость, при которой достигается эта сила натяжения:

$$\boxed{F_{max} = \frac{k l_0}{\frac{4\pi^2 k}{m_0\omega^2} - 1} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\omega}_2 = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m_0\left(1 + \frac{k l_0}{F_{max}}\right)}}} \tag{13}$$

Заметим, что угловая скорость, определяемая по формуле (13) всегда меньше, скорости, задаваемой формулой (12). Поэтому окончательным ответом на поставленный вопрос является формула (13).

2.3 Переход к нерастяжимому жгуту может быть формально проведен с помощью формулы (13), если считать, что $k \Rightarrow \infty$. В этом пределе максимальная угловая скорость угловая скорость описывается формулой

$$\tilde{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{F_{max}}{m_0 l_0}} \qquad (14)$$

Впрочем, этот же результат непосредственно следует из уравнения (9), если положить, что длина окружности кольца равна длине жгута.