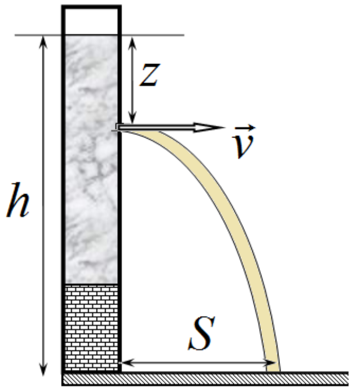
Задача 9-3. «Формула Торричелли»

Часть 1. Дальность полета струи.



1.1 В соответствии с формулой Торричелли скорость струи на выходе из отверстия равна

$$v = \sqrt{2gz}\,. \tag{1}$$

Так как сопротивление воздуха пренебрежимо мало, то горизонтальная составляющая скорости струи будет сохраняться. Поэтому дальность полета струи можно вычислить, как произведение горизонтальной скорости на время падения

$$S = v\tau\,. \tag{2}$$

Вертикальное движение струи является равноускоренным с ускорением свободного падения, поэтому справедливо соотношение

$$h - z = \frac{g\tau^2}{2}\,. \tag{3}$$

Из которого легко найти время падения

$$\tau = \sqrt{2\frac{h-z}{g}}\,. \tag{4}$$

Подставляя формулы для скорости и времени падения в формулу (2), получим формулу для дальности полета струи:

$$S = v\tau = \sqrt{2gz}\sqrt{2\frac{h-z}{g}} = 2\sqrt{z(h-z)}\,. \tag{5}$$

1.2 В формуле (5) под корнем стоит квадратичная функция от z, которая обращается в нуль при $z = 0$ и $z = h$. Так как парабола – симметричная кривая, то ее максимум находится по середине между нулями, т.е. при $z' = \frac{h}{2}$. Тогда максимальная дальность струи равна

$$S_{\max} = 2\sqrt{\frac{h}{2}\left(h - \frac{h}{2}\right)} = h\,. \tag{6}$$

1.3 По рисунку следует определить глубины, на которых находятся отверстия z_k, высоту Уровня воды h. Затем дальности струй рассчитываются по формуле (6). Результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1.

Номер струи k	Высота h_k (см)	Глубина отверстия z_k (см)	Дальность струи S_k, (см)
1	80	14	61
2	80	26	75
3	80	41	80

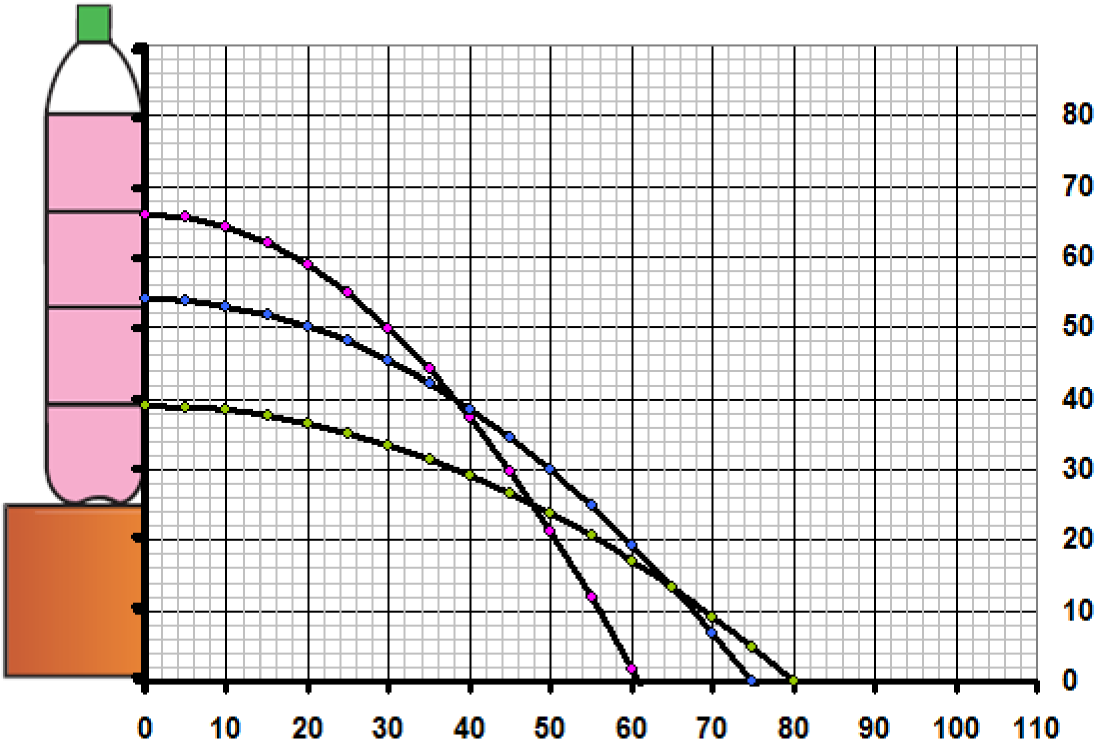
1.4 Зависимости координат точек струи от времени описываются функциями

$$\begin{cases} x = vt \\ y = (h-z) - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases} . \tag{7}$$

Из первого уравнения выразим $t = \dfrac{x}{v}$ и подставим во второе, в результате получим уравнение траектории

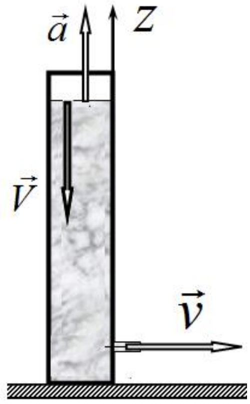
$$y = (h-z) - \frac{g}{2v^2}x^2 = (h-z) - \frac{x^2}{4z}, \tag{8}$$

где использована формула Торричелли для начальной скорости струи.
Рисунок струй, рассчитанных по формуле (8), показан на рисунке.



Часть 2. Время вытекания.

2.1 Качественное описание.



2.1.1 Очевидно, что вектор скорости $\vec{V}$ движения уровня воды направлен вниз. При понижении уровня воды скорость вытекания, а, следовательно, и модуль скорости движения уровня воды уменьшаются. Поэтому вектор ускорения $\vec{a}$ уровня воды направлен вверх.

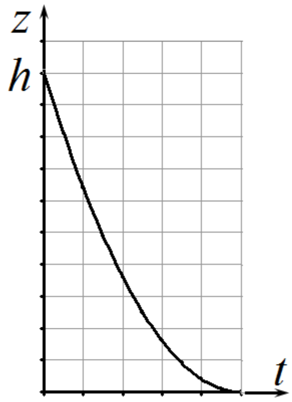
2.1.2 Так как общий объем воды остается неизменным, то между скоростью вытекания v и скоростью опускания уровня V выполняется соотношение

$$SV = sv\,. \qquad (9)$$

Скорость вытекания определяется формулой Торричелли, поэтому искомая зависимость имеет вид

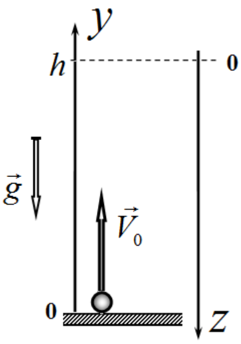
$$V_z = -\frac{s}{S}v = -\frac{s}{S}\sqrt{2gz} = -\sqrt{2\eta^2 gz}\,. \qquad (10)$$

Знак минус указывает направление вектора скорости.



2.1.3 Модуль скорость опускания уровня воды изменяется от максимального значения до нуля (при $z = 0$). Графически это означает, что угол наклона касательной к графику зависимости координаты от времени уменьшается от максимального значения до нуля, когда уровень воды достигает нулевой отметки. Схематический график такой зависимости показан на рисунке.

2.2 Вспомогательная задача.



2.2.1 Тело будет двигаться равноускоренно с ускорением свободного падения g. Учитывая направления векторов начальной скорости и ускорения зависимости, проекции скорости $V_y(t)$ и координаты $y(t)$ от времени имеют вид:

$$V_y(t) = V_0 - gt \qquad (11)$$

$$y(t) = V_0 t - \frac{gt^2}{2} \qquad (12)$$

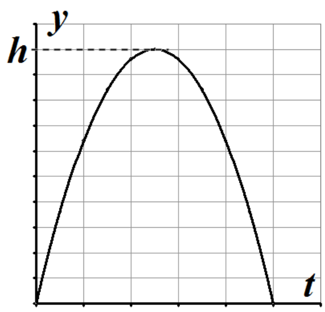


График зависимости координаты от времени $y(t)$ является параболой, ветви которой направлены вниз (см. рис)

2.2.2 Максимальная высота подъема тела $h = z_{\max}$ определяется по известной формуле

$$h = \frac{V_0^2}{2g}. \qquad (13)$$

2.2.3 Координаты z и y, и проекции скорости на эти оси связаны простыми геометрическими соотношениями

$$\begin{aligned} z &= h - y \\ V_z &= -V_y \end{aligned}. \qquad (14)$$

Подставляя найденные ранее зависимости в эти формулы, получим

$$V_z(t) = -V_0 + gt \qquad (15)$$

$$z(t) = \frac{V_0^2}{2g} - V_0 t + \frac{gt^2}{2} \qquad (16)$$

2.2.4 Для нахождения зависимости проекции скорости тела на ось z от его координаты $V_z(z)$ преобразуем формулу (16) к виду

$$z = \frac{V_0^2}{2g} - V_0 t + \frac{gt^2}{2} = \frac{1}{2g}\left(V_0^2 - 2gV_0 t + g^2 t^2\right) = \frac{1}{2g}\left(V_0 - gt\right)^2 = \frac{V_z^2}{2g}. \qquad (17)$$

Из которого следует, что

$$V_z = \mp\sqrt{2gz}, \qquad (18)$$

Причем знак «-» соответствует этапу подъема тела, знак «+» - его падению.

2.3 Возвращение к вытеканию воды.

2.3.1 Сравним результаты решения вспомогательной задачи (п.2.2 на этапе подъема тела) и анализа процесса вытекания воды из сосуда (п.2.1). Для удобства сравнение проведем в Таблице 2.

Таблица 2.

Характеристика	Вспомогательная задача	Вытекание воды
Начальная координата	$z_0 = h$	$z_0 = h$
Модуль начальной скорости: Из формул (13) и (10)	$V_0 = \sqrt{2gh}$	$V_0 = \sqrt{2\eta^2 gh}$
Зависимость скорости от координаты	$V_z = -\sqrt{2gz}$	$V_z = -\sqrt{2\eta^2 gz}$
Зависимость координаты от времени	$z = \frac{1}{2g}\left(V_0 - gt\right)^2$	???

Как хорошо видно, эти задачи практически полностью эквивалентны друг другу! Отличие заключается только в величине ускорения. Из сравнения следует, что ускорение, с которым опускается уровень воды постоянно и равно

$$a = \eta^2 g \qquad (19)$$

Поэтому и закон движения уровня воды в сосуде будет таким же, только с измененным ускорением (19):

$$z(t) = \frac{1}{2\eta^2 g}\left(V_0 - \eta^2 gt\right)^2 = \frac{1}{2\eta^2 g}\left(\sqrt{2\eta^2 gh} - \eta^2 gt\right)^2 \qquad (20)$$

2.3.2 Время вытекания находится из формулы (20), в которой следует положить $z = 0$

$$\sqrt{2\eta^2 gh} - \eta^2 g\tau = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{1}{\eta}\sqrt{\frac{2h}{g}} . \qquad (21)$$

Оказывается, что время вытекания столба воды высотой h в η раз меньше, чем время падения с той же высоты.

2.3.3 При расчете следует учесть, что отношение площадей двух кругов пропорционально отношению квадратов их радиусов. Поэтому формула для расчета времени вытекания может быть записана в виде

$$\tau = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sqrt{\frac{2h}{g}} = \left(\frac{5{,}0}{0{,}1}\right)^2 \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}20}{9{,}8}} = 5{,}0 \cdot 10^2 c . \qquad (22)$$