

Задача 3. Электромобиль.

Часть 1. Движение по твердой горизонтальной поверхности.

1.1 Запишем уравнения, описывающие движение электромобиля в установившемся режиме.

Первое. При движении с постоянной скоростью сила тяги, развиваемая двигателем, точно уравновешивает силу сопротивления воздуха, поэтому

$$kI = \beta v^2. \quad (1)$$

Второе. Так как при работе двигателя в его обмотке возникает неизвестная (или трудно рассчитываемая) ЭДС самоиндукции, то использовать закон Ома для определения силы тока в цепи невозможно. Поэтому вместо этого закона следует воспользоваться законом сохранения энергии: энергия, выдаваемая источником тока $U_0 I$, расходуется на теплоту, выделяющейся на резисторе $I^2 R$ и на работу по преодолению сил сопротивления $F_c v = \beta v^3$, следовательно:

$$U_0 I = I^2 R + \beta v^3. \quad (2)$$

Для того, чтобы получить систему уравнений в «безразмерном» виде, перепишем уравнения (1) – (2) для двух крайних случаев, описанных в условии задачи. При застопоренном двигателе скорость автомобиля равна нулю. В этом случае сила тока будет минимальна при максимальном сопротивлении резистора. Поэтому

$$I_1 = \frac{U_0}{R_{\max}} \Rightarrow R_{\max} = \frac{U_0}{I_1}. \quad (3)$$

Скорость электромобиля будет максимальна при нулевом сопротивлении резистора, в этом случае

$$\begin{aligned} U_0 I_0 &= \beta v_{\max}^3 \\ k I_0 &= \beta v_{\max}^2 \end{aligned} \quad (4)$$

Выразим значения сопротивления резистора, скорости электромобиля и силы тока в цепи через указанные в условии безразмерные параметры:

$$\begin{aligned} R &= x R_{\max} \\ v &= y v_{\max} \\ I &= z I_0 \end{aligned} \quad (5)$$

и подставим их в исходные уравнения. Тогда из уравнения (1) следует

$$kI = \beta v^2 \Rightarrow k I_0 z = \beta v_{\max}^2 y^2. \quad (6)$$

Тогда с учетом (4), получим

Теоретический тур. Вариант 1.

10 класс. Решения задач. Бланк для жюри.

$$z = y^2. \quad (7)$$

Подстановка (5) в уравнение (2) дает

$$U_0 I = I^2 R + \beta v^3 \Rightarrow U_0 I_0 z = I_0^2 R_{\max} z^2 x + \beta v_{\max}^3 y^3 \Rightarrow U_0 I_0 z = I_0^2 \frac{U_0}{I_1} z^2 x + \beta v_{\max}^3 y^3.$$

При учете соотношения (4), получаем окончательно

$$z = \frac{I_0}{I_1} z^2 x + y^3 \Rightarrow z^2 x + \gamma y^3 - \gamma z = 0 \quad (8)$$

Таким образом, уравнения (7) и (8) образуют искомую систему для расчета требуемых зависимостей.

1.2 Найти решение полученной системы довольно просто. Подставим значение z из уравнения (7) в уравнение (8):

$$y^4 x + \gamma y^3 - \gamma y^2 = 0 \quad (9)$$

После сокращения, получаем квадратное уравнение

$$y^2 x + \gamma y - \gamma = 0 \quad (10)$$

Положительный корень, которого равен:

$$y(x) = \frac{\sqrt{\gamma^2 + 4\gamma x} - \gamma}{2x}. \quad (11)$$

Заметим, что при $x \rightarrow 0$ $y \rightarrow 1$.

1.3 Зависимость $z(x)$ следует из уравнения (7):

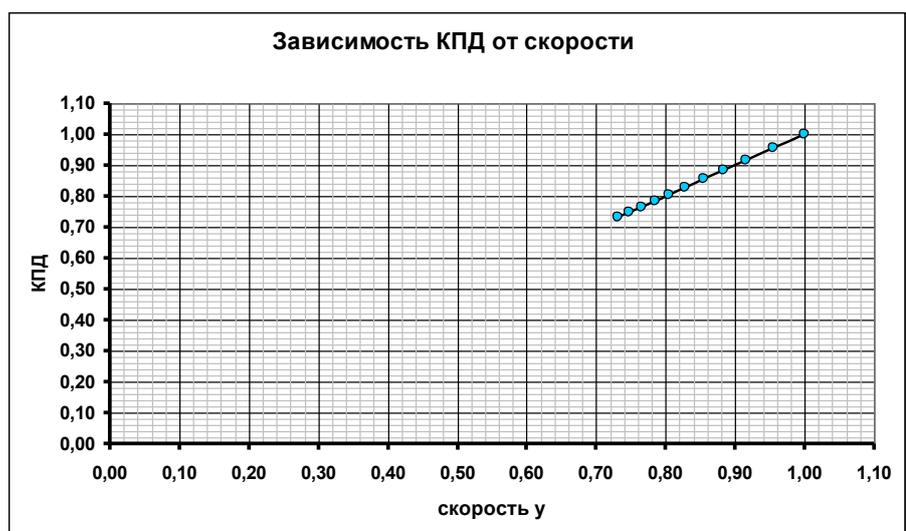
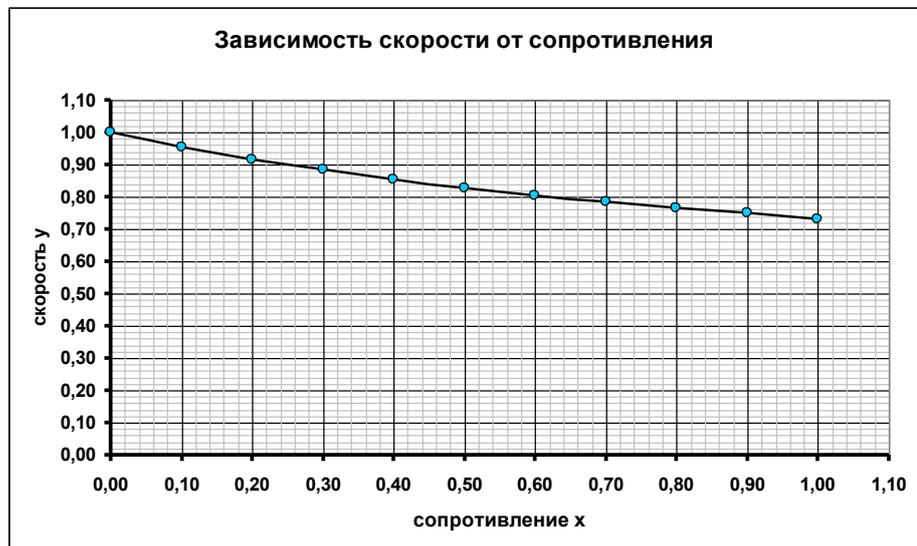
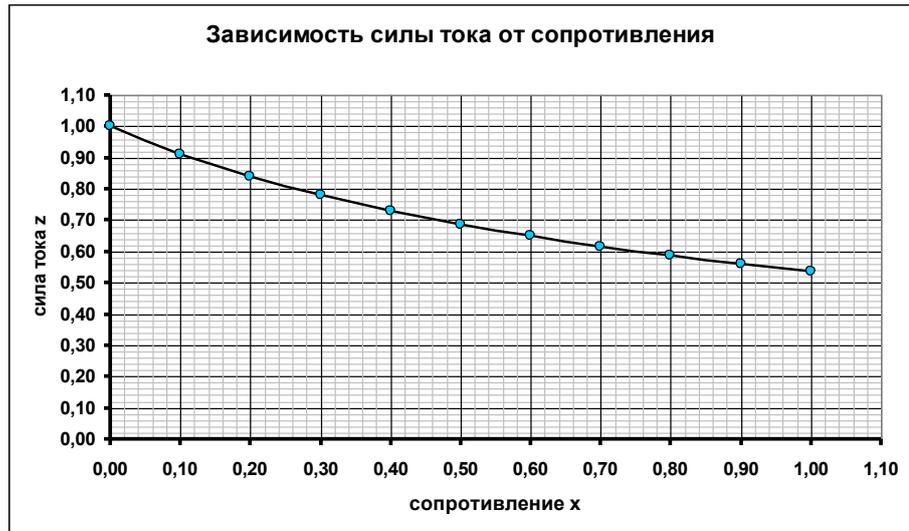
$$z(x) = y^2 = \left(\frac{\sqrt{\gamma^2 + 4\gamma x} - \gamma}{2x} \right)^2 \quad (12)$$

1.4 В данном случае под КПД следует понимать отношение мощности двигателя к мощности, развиваемой источником тока, поэтому

$$\eta = \frac{\beta v^3}{U_0 I} = \frac{\beta v_{\max}^3 y^3}{U_0 I_0 z} = \frac{y^3}{z} = y. \quad (13)$$

1.5 Необходимые расчеты по полученным формулам приведены в таблице, по которой построены требуемые графики.

Сопротивление, x	Скорость y	Сила тока, z	КПД, η
0,00	1,00	1,00	1,00
0,10	0,95	0,91	0,95
0,20	0,92	0,84	0,92
0,30	0,88	0,78	0,88
0,40	0,85	0,73	0,85
0,50	0,83	0,69	0,83
0,60	0,81	0,65	0,81
0,70	0,78	0,62	0,78
0,80	0,77	0,59	0,77
0,90	0,75	0,56	0,75
1,00	0,73	0,54	0,73



Часть 2. Движение электромобиля по ковру.

2.1 При появлении постоянной силы трения качения исходные уравнения преобразуются следующим очевидным образом:

$$kI = F_{mp.} + \beta v^2. \quad (14)$$

$$U_0 I = I^2 R + F_{mp.} v + \beta v^3. \quad (15)$$

Учитывая, что по условию $F_{mp.} = \varepsilon \beta v_{max}^2$, и проведя аналогичный переход к безразмерным уравнениям, получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} z = \varepsilon + y^2 \\ z = \frac{1}{\gamma} z^2 x + \varepsilon y + y^3 \end{cases} \quad (16)$$

Когда электромобиль только начинает двигаться, его скорость еще равна нулю, поэтому и $y = 0$. Тогда из системы уравнений (16) легко найти:

$$\begin{cases} z = \varepsilon \\ z = \frac{1}{\gamma} z^2 x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\gamma}{\varepsilon} = 20 \quad (17)$$

Найденное значение больше максимального значения сопротивления резистора. Поэтому электромобиль сдвинется при любом возможном значении сопротивления резистора.

2.2 Как и ранее, максимальная скорость автомобиля будет достигаться при нулевом сопротивлении переменного резистора, т.е. при $x = 0$. В этом случае система (16) преобразуется к виду

$$\begin{cases} z = \varepsilon + y^2 \\ z = \varepsilon y + y^3 \end{cases} \Rightarrow \varepsilon + y^2 = \varepsilon y + y^3 \Rightarrow y = 1 \quad (18)$$

То есть максимальная скорость движения электромобиля при появлении силы трения качения не изменится.