

## Задание 11-2. Магнетизм и теплота.

### Часть 1. Основные понятия.

**1.1** Индуктивность соленоида может быть найдена из формулы для ЭДС самоиндукции. С одной стороны, модуль ЭДС самоиндукции определяется как

$$\varepsilon_{si} = L \frac{\Delta I}{\Delta t}. \quad (1)$$

С другой стороны, эта величина может быть выражена с помощью закона электромагнитной индукции Фарадея:

$$\varepsilon_{in} = N \left( \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right) = N \left( S \frac{\Delta B}{\Delta t} \right) = N \left( S \frac{\Delta \mu_0 n I}{\Delta t} \right) = \mu_0 n^2 \pi r^2 l \frac{\Delta I}{\Delta t} \quad (2)$$

Сравнивая эти два выражения, получаем формулу для индуктивности соленоида

$$L = \mu_0 n^2 \pi r^2 l \quad (3)$$

**1.2** Требуемое уравнение следует из закона Ома для полной цепи:

$$U_0 + \varepsilon_{si} = IR \quad (4)$$

Используя формулу (1) с учетом правила Ленца, запишем

$$U_0 - L \frac{\Delta I}{\Delta t} = IR. \quad (5)$$

Из этого уравнения следует требуемое выражение:

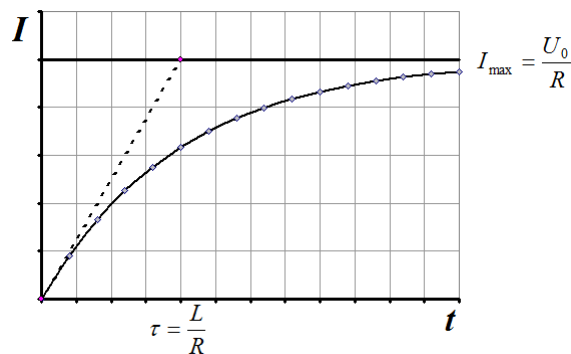
$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{R}{L} \left( \frac{U_0}{R} - I \right). \quad (6)$$

**1.3 – 1.5** Схематический график зависимости силы тока от времени показан на рисунке. Сила тока монотонно возрастает от нуля до максимального значения

$$I_{\max} = \frac{U_0}{R}. \quad (7)$$

С характерным временем

$$\tau = \frac{L}{R}. \quad (8)$$



**1.6** Если сопротивление цепи равно нулю, то из уравнения (4)

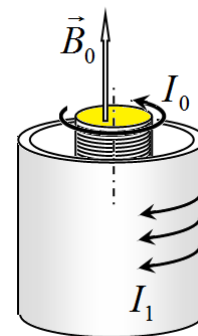
$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{U_0}{L}. \quad (9)$$

Следует, что сила тока будет возрастать по линейному закону

$$I = \frac{U_0}{L} t. \quad (10)$$

## Часть 2. Соленоид в трубке.

**2.1** При изменении тока в обмотке соленоида изменяется и магнитное поле, создаваемое им. Изменяющееся магнитное поле, создает вихревое электрическое поле, описываемое законом электромагнитной индукции. Часто утверждают, что магнитное поле соленоида локализуется только внутри соленоида. Однако оно существует во всем пространстве, в том числе и вне его. Поэтому вихревое электрическое поле возникает и в области расположения трубки. Однако, при расчете магнитного потока через поперечное сечение трубки можно учитывать только магнитное поле внутри соленоида. Направление токов в обмотке и в стенках трубки показано на рисунке. При определении направления индукционного тока учтено сила тока в обмотке возрастает. Так как в данной части рекомендуется пренебречь магнитным полем тока в трубке, то закон изменения силы тока в обмотке будет описываться формулой (10)



ЭДС индукции, возникающей в стенках трубки равна

$$\varepsilon_1 = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{L}{N} \frac{\Delta I_0}{\Delta t} = -\frac{U_0}{N}. \quad (11)$$

Так как ток протекает перпендикулярно оси трубки, то ее электрическое сопротивление равно

$$R_1 = \rho \frac{2\pi r_1}{lh}. \quad (12)$$

В соответствии с законом Ома сила тока в стенках трубки равна

$$I_1 = \frac{\varepsilon_1}{R_1} = \frac{U_0}{\rho \frac{2\pi r_1}{lh}} = \frac{lh}{2\pi r_1 \rho} \frac{U_0}{N}. \quad (13)$$

**2.2** Мощность, развиваемая источником, равна

$$P_0 = U_0 I_0 = \frac{U_0^2}{L} t. \quad (14)$$

Не сложно показать, что эта энергия идет на создание магнитного поля внутри соленоида. Из уравнения (9) выразим:

$$U_0 = L \frac{\Delta I_0}{\Delta t}. \quad (15)$$

Умножим данное уравнение на силу тока в цепи источника и преобразуем полученное уравнение:

$$P_0 = U_0 I_0 = LI_0 \frac{\Delta I_0}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{LI_0^2}{2} \right). \quad (16)$$

Физическая интерпретация данного выражения очевидна: энергия источника идет на увеличение магнитного поля внутри соленоида.

Дополнение (не требуется). Для наглядного доказательства последнего утверждения преобразуем выражение, стоящее в скобках:

$$\frac{LI_0^2}{2} = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \pi r_0^2 l I_0^2 = \frac{(\mu_0 n I_0)^2}{2 \mu_0} V$$

Видим, что действительно, эта величина есть энергия магнитного поля внутри соленоида.

**2.3** Мощность теплоты, выделяющейся в трубке, вычисляется по закону Джоуля – Ленца:

$$P_h = I_1^2 R_1 = \frac{U_0^2}{N^2 R_1} = \frac{lh}{2\pi r \rho N^2} U_0^2. \quad (17)$$

**2.4** Полученные выражения приводят к парадоксу: откуда появляется энергия, выделяющаяся в виде теплоты не понятно! Понятно, что единственный источник энергии в данной системе – это источник тока. Для разрешения парадокса необходимо решить следующую часть задачи.

### Часть 3. Передача энергии.

**3.1** На рисунке показано направление вектора индукции  $\vec{B}_1$  магнитного поля, создаваемого током в стенках трубки.

**3.2** Для определения индукции поля  $\vec{B}_1$  обратимся к формуле (1), приведенной в условии задачи

$$B = \mu_0 n I$$

Обратим внимание, что  $nI$  имеет смысл силы тока, протекающего через единицы длины соленоида. Аналогом этой величины для стенок трубки

является величина  $\frac{I_1}{l}$ . Следовательно, индукция поля, создаваемого этим током, равна

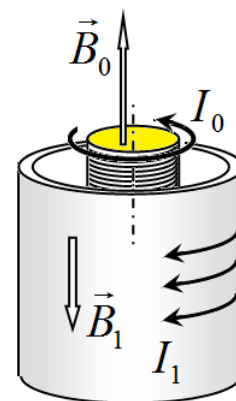
$$B_1 = \frac{\mu_0}{l} I_1. \quad (18)$$

**3.3** Отметим, что даже в случае сверхпроводящего соленоида сила тока в его обмотке будет изменяться по иному закону, отличному от линейного. Поэтому сила тока в стенках трубки не будет постоянной. Чтобы учесть влияние магнитного поля, создаваемого электрическим током в стенках трубки, в уравнениях для сил токов необходимо учесть ЭДС индукции, возникающих при изменении, как полем тока соленоида, так и полем тока трубки. Положительным направлением силы тока будем считать направление тока в обмотке соленоида, тогда положительным направлением вектора индукции будет направление вектора индукции  $\vec{B}_0$ .

Запишем выражения для всех ЭДС.

ЭДС самоиндукции, создаваемой магнитным полем тока  $I_0$  в обмотке соленоида:

$$\varepsilon_{00} = -L \frac{\Delta I_0}{\Delta t} = -\mu_0 n^2 \pi r_0^2 l \frac{\Delta I_0}{\Delta t} \quad (19)$$



ЭДС индукции в стенках трубки, создаваемой током в обмотке  $I_0$ :

$$\varepsilon_{10} = -\pi r_0^2 \mu_0 n \frac{\Delta I_0}{\Delta t} = -\mu_0 n \pi r_0^2 \frac{\Delta I_0}{\Delta t} = L_{10} \frac{\Delta I_0}{\Delta t} \quad (20)$$

ЭДС индукции в обмотке соленоида, создаваемой током в трубке

$$\varepsilon_{01} = -N \frac{\Delta \Phi_1}{\Delta t_1} = -N \pi r_0^2 \frac{\Delta B_1}{\Delta t} = -\frac{\mu_0 \pi r_0^2 N}{l} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = -\mu_0 \pi r_0^2 n \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = -L_{01} \frac{\Delta I_1}{\Delta t}. \quad (21)$$

В этих формулах обозначено  $L_{01} = L_{10} = \mu_0 \pi r_0^2 n$  коэффициент взаимной индукции.

ЭДС самоиндукции в стенках трубки, создаваемой током в той же трубке

$$\varepsilon_{11} = -\frac{\Delta \Phi_1}{\Delta t_1} = -\pi r_1^2 \frac{\Delta B_1}{\Delta t} = -\frac{\mu_0 \pi r_1^2}{l} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = -L_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t}. \quad (21)$$

Здесь обозначено  $\frac{\mu_0 \pi r_1^2}{l} = L_1$  - индуктивность трубки.

Теперь на основании закона Ома запишем уравнения для сил токов.

Для силы тока в обмотке соленоида:

$$\begin{aligned} U_0 + \varepsilon_{00} + \varepsilon_{01} &= I_0 R \Rightarrow \\ U_0 - L \frac{\Delta I_0}{\Delta t} - L_{01} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} &= I_0 R \end{aligned} \quad (22)$$

Для силы тока в стенках трубки

$$\begin{aligned} \varepsilon_{10} + \varepsilon_{11} &= I_1 R_1 \Rightarrow \\ -L_{10} \frac{\Delta I_0}{\Delta t} - L_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} &= I_1 R_1 \end{aligned} \quad (23)$$

Запишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} U_0 = L \frac{\Delta I_0}{\Delta t} + L_{01} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + I_0 R \\ 0 = L_{10} \frac{\Delta I_0}{\Delta t} + L_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + I_1 R_1 \end{cases} \quad (24)$$

**3.4** Умножим первое уравнение этой системы на  $I_0$ , второе – на  $I_1$ :

$$\begin{cases} U_0 I_0 = L I_0 \frac{\Delta I_0}{\Delta t} + L_{01} I_0 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + I_0^2 R \\ 0 = L_{10} I_1 \frac{\Delta I_0}{\Delta t} + L_1 I_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + I_1^2 R_1 \end{cases}$$

и просуммируем их, получим выражение для мощности, развиваемой источником:

$$U_0 I_0 = \left( L I_0 \frac{\Delta I_0}{\Delta t} + L_{01} I_0 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + L_{10} I_1 \frac{\Delta I_0}{\Delta t} + L_1 I_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} \right) + I_0^2 R + I_1^2 R_1. \quad (25)$$

Можно показать, что выражение в скобках есть скорость изменения энергии магнитного поля, второе слагаемое – мощность теплоты, выделяющейся в обмотке соленоида, последнее слагаемое – мощность теплоты, выделяющейся в стенках трубки. Таким образом, энергия, выделяющаяся в трубке, передается от источника посредством изменяющегося магнитного поля.

Дополнение (не требуется). Для доказательства того, что выражение в скобках действительно есть скорость изменения энергии магнитного поля, преобразуем его к виду:

$$LI_0 \frac{\Delta I_0}{\Delta t} + LI_0 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + LI_1 \frac{\Delta I_0}{\Delta t} + L_1 I_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \Delta \left( \frac{LI_0^2}{2} + L_{01} I_0 I_1 + \frac{L_1 I_1^2}{2} \right). \quad (26)$$

Теперь выразим каждое слагаемое через индукции полей. Для этого сначала выразим силы токов через соответствующие индукции:

$$I_0 = \frac{B_0}{\mu_0 n}, \quad I_1 = \frac{l}{\mu_0} B_1. \quad (27)$$

Возвращаясь к формуле (26), записываем:

$$\begin{aligned} LI_0^2 &= \mu_0 n^2 \pi r_0^2 l \left( \frac{B_0}{\mu_0 n} \right)^2 = \frac{B_0^2}{\mu_0} \pi r_0^2 l \\ L_1 I_1^2 &= \frac{\mu_0}{l} \pi r_1^2 \left( \frac{l}{\mu_0} B_1 \right)^2 = \frac{B_1^2}{\mu_0} \pi r_1^2 l \\ L_{01} I_0 I_1 &= \mu_0 \pi r_0^2 n \frac{B_0}{\mu_0 n} \frac{l}{\mu_0} B_1 = \frac{B_0 B_1}{\mu_0} \pi r_0^2 l \end{aligned} \quad (28)$$

Подставляя в рассматриваемое выражение (26), окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \frac{LI_0^2}{2} + L_{01} I_0 I_1 + \frac{L_1 I_1^2}{2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{B_0^2}{\mu_0} \pi r_0^2 l + 2 \frac{B_0 B_1}{\mu_0} \pi r_0^2 l + \frac{B_1^2}{\mu_0} \pi r_0^2 l + \frac{B_1^2}{\mu_0} \pi (r_1^2 - r_0^2) l \right) \\ &= \frac{(B_0 + B_1)^2}{2\mu_0} \pi r_0^2 l + \frac{B_1^2}{2\mu_0} \pi (r_1^2 - r_0^2) l \end{aligned} \quad (29)$$

Теперь совершенно очевидно, что первое слагаемое – энергия поля внутри соленоида, второе слагаемое – энергия поля между трубкой и соленоидом.