

Задача 3. Эффект Эйнштейна-де-Гааза

1. В полном соответствии с теоретическим введением момент импульса электрона, вращающегося по круговой орбите вокруг ядра атома, определяется соотношением:

$$L = m_e v r \quad (1)$$

2. Электрон, движущийся по круговой орбите, аналогичен круговому току, сила которого может быть записана в виде:

$$i = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r} \quad (2)$$

Тогда магнитный момент такого кругового тока:

$$p_m = i\pi r^2 = \frac{evr}{2} \quad (3)$$

Не стоит забывать о том, что момент импульса и магнитный момент, - это векторные величины. Вследствие того, что электрон – отрицательно заряженная частица, а за направление тока принято направление движения положительно заряженных частиц, соответствующие моменты направлены в разные стороны.

3. Выразим гиромагнитное отношение с использованием (1) и (3), с учетом направления векторов:

$$\vec{p}_m = -\frac{e}{2m_e} \vec{L} \quad (4)$$

$$g = \frac{p_m}{L} = \frac{e}{2m_e} = 8,78 \cdot 10^{10} \frac{\text{Кл}}{\text{кг}} \quad (5)$$

4. Рассмотрим момент импульса всех электронов, отвечающих за магнитные свойства цилиндра. Используя гиромагнитное отношение, свяжем значение суммарного момента импульса электронов с магнитными моментами каждого из них:

$$\vec{L}_e = -\frac{2m_e}{e} \sum_{(i)} \vec{p}_{mi} \quad (6)$$

Изменение момента импульса электронов при изменении магнитных моментов:

$$\Delta \vec{L}_e = -\frac{2m_e}{e} \sum_{(i)} \Delta \vec{p}_{mi} \quad (7)$$

Поскольку суммарный момент импульса цилиндра не изменяется, можно записать:

$$\Delta \vec{L}_e + \Delta \vec{L}_{цпл} = 0 \longrightarrow \Delta \vec{L}_{цпл} = -\Delta \vec{L}_e \quad (8)$$

И по итогу:

$$\Delta \vec{L}_{цпл} = \frac{2m_e}{e} \sum_{(i)} \Delta \vec{p}_{mi} \quad (9)$$

5. При изменении направления магнитного поля на противоположное магнитные моменты электронов, вращающихся на круговых орбитах, переворачиваются:

$$\overrightarrow{\Delta p_m} = -2\overrightarrow{p_m} \quad (10)$$

Тогда в соответствии с (9) получаем:

$$\overrightarrow{\Delta L_{цпл}} = \frac{2m_e}{e} (-2\overrightarrow{p_m})N, \quad (11)$$

Где N – количество электронов, отвечающих за магнитные свойства образца. Поскольку количество таких электронов совпадает с числом атомов, получаем:

$$N = \frac{m}{M} N_A \quad (12)$$

И в итоге:

$$\overrightarrow{\Delta L_{цпл}} = -\frac{4m_e}{e} \frac{m}{M} N_A \overrightarrow{p_m} \quad (13)$$

Исходя из изменения момента импульса цилиндра найдем конечную угловую скорость вращения:

$$\Delta L_{цпл} = I\Delta\omega = \frac{4m_e}{e} \frac{m}{M} N_A p_m \quad (14)$$

Откуда с учетом выражения для момента инерции цилиндра получаем:

$$\omega = \frac{8m_e}{eMr^2} N_A p_m \quad (15)$$

6. Вывод уравнения крутильных колебаний цилиндра:

Изменение момента импульса:

$$\frac{dL}{dt} = I\alpha''(t) \quad (16)$$

Оно связано с действием следующих вращающих моментов:

А) Возвращающий момент

$$M_1 = -I\omega_0^2\alpha(t), \quad (17)$$

отвечающий за собственные крутильные колебания с циклической частотой ω_0 ;

Б) Момент сил вязкого трения, описанный в условии задачи:

$$M_2 = -k\alpha'(t), \quad (18)$$

где $\alpha'(t)$ - угловая скорость вращения цилиндра;

В) Механический момент, связанный с перемагничиванием цилиндра во внешнем переменном магнитном поле, любезно предоставленный авторами задачи:

$$M_3 = \frac{4P_m}{\pi g} \omega \cos \omega t \quad (19)$$

Уравнение динамики вращательного движения цилиндра тогда:

$$\frac{dL}{dt} = M_1 + M_2 + M_3 \quad (20)$$

Уравнение крутильных колебаний цилиндра во внешнем переменном магнитном поле с учетом всех приближений, описанных в условии задачи выглядит следующим образом:

$$I\alpha''(t) = -I\omega_0^2\alpha(t) - k\alpha'(t) + \frac{4P_m}{\pi g} \omega \cos \omega t \quad (20)$$

7. Подставим в уравнение (20) функцию, описанную в условии задачи: $\alpha(t) = A \sin(\omega t + \phi)$.

Для подстановки выразим производные от данной функции по времени:

$$\alpha'(t) = \omega A \cos(\omega t + \phi) \quad (21)$$

$$\alpha''(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi) \quad (22)$$

Подставляя (21), (22) в (20), и учитывая, что частота колебаний внешнего переменного магнитного поля равна собственной частоте колебаний системы $\omega = \omega_0$, получаем:

$$\alpha(t) = \frac{4P_m}{\pi g k} \sin(\omega t), \text{ т.е. } A = \frac{4P_m}{\pi g k}, \phi = 0 \quad (23).$$

8. Выразим тогда гиромагнитное отношение:

$$g = \frac{4P_m}{\pi |\alpha_{\max}| k} = 8,7 \cdot 10^{10} \quad (24)$$

9. Отличие измеренного значения гиромагнитного отношения от предсказываемого теорией объясняется наличием собственного магнитного момента электрона и ядра атома – спина.