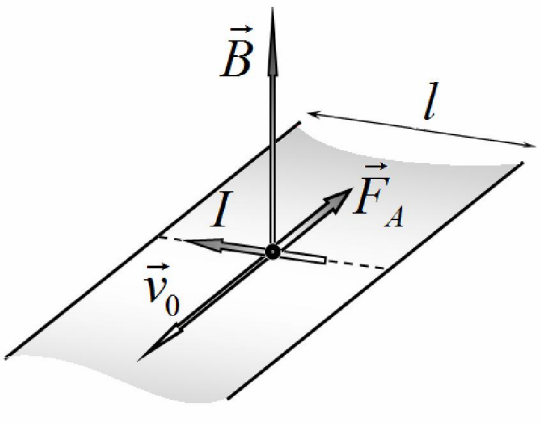
Задача 11-3. Электрогенератор и электродвигатель

Часть 1. Генератор



1.1 Пусть в некоторый момент времени скорость ленты равна v_0. Тогда со стороны магнитного поля на заряженные частицы (носители тока) в проводящей ленте действует сила Лоренца, модуль которой равен

$$F_Л = qv_0B \qquad (1)$$

Эта сила приводит к возникновению электрического тока, который в соответствии с «правилом левой руки» направлен перпендикулярно ленте, как показано на рисунке. Сила Лоренца в данном случае выступает в роли сторонней силы, ЭДС которой равна

$$\varepsilon = \frac{F_Л l}{q} = v_0 Bl\,. \qquad (2)$$

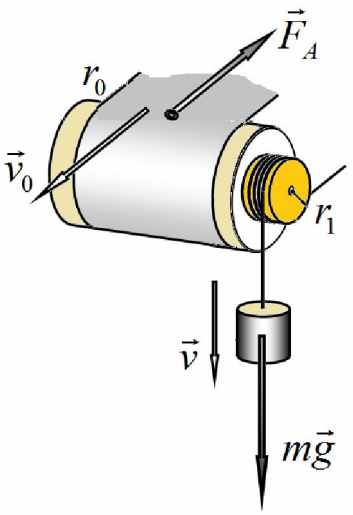
Сила возникающего тока по закону Ома равна

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{v_0 Bl}{R}\,. \qquad (3)$$

Этот взаимодействует с магнитным полем, что приводит к появлению силы Ампера $\vec{F}_A$, которая направлена в сторону, противоположную скорости движения ленты (опять «правило левой руки»). Модуль этой силы равен

$$F_A = IBl = \frac{B^2 l^2}{R} v_0\,. \qquad (4)$$

Таким образом, в процессе движения ленты возникает сила, направленная противоположная ее скорости и пропорциональная ей. Эта сила подобна силе вязкого трения (ее часто называют «магнитной вязкостью»). Поэтому на ленту действует постоянная сила, обусловленная силой тяжести подвешенного груза, и сила вязкого трения. В результате действия этих сил скорость ленты стабилизируется и достигает некоторого постоянного значения.



1.2.1 Для определения скорости установившегося движения рассмотрим силы, действующие на цилиндр с валом. Это найденная сила Ампера и сила натяжения нити. Когда лента и груз движутся с постоянными скоростями, сила натяжения нити равна силе тяжести $m\vec{g}$, действующей на груз. Так как цилиндр вращается с постоянной скоростью, то суммарный момент сил, действующих на него равен нулю, поэтому справедливо соотношение

$$mgr_1 = F_A r_0 \qquad (5)$$

Используя формулу (4) для силы Ампера, получим выражение

$$mgr_1 = \frac{B^2 l^2}{R} v_0 r_0\,. \qquad (4)$$

Из которого находим скорость движения ленты

$$v_0 = \frac{mgR}{B^2 l^2}\frac{r_1}{r_0}\,. \qquad (5)$$

Скорость опускания груза найдем из очевидного соотношения

$$\frac{v_0}{r_0}=\frac{v}{r_1} \quad \Rightarrow \quad v=\frac{r_1}{r_0}v_0=\frac{mgR}{B^2l^2}\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2. \tag{5}$$

1.2.2 Для расчета ЭДС воспользуемся формулой (2) и найденным значением скорости движения ленты (5):

$$\varepsilon = v_0 Bl = \frac{mgR}{Bl}\frac{r_1}{r_0}. \tag{6}$$

Сила тока рассчитывается по закону Ома (3):

$$I=\frac{\varepsilon}{R}=\frac{mg}{Bl}\frac{r_1}{r_0}. \tag{7}$$

Интересно отметить, что сила тока в цепи нагрузки не зависит от ее сопротивления и пропорциональна массе подвешенного груза.

1.2.3 Мощность тока в нагрузке рассчитывается по закону Джоуля – Ленца:

$$P=I^2R=\left(\frac{mg}{Bl}\frac{r_1}{r_0}\right)^2 R. \tag{8}$$

1.2.4 Данный генератор преобразует потенциальную энергию опускающегося груза в теплоту, выделяющуюся на резисторе Поэтому КПД установки можно определить как отношение мощности, выделяющейся на нагрузке, к мощности силы тяжести $P_0=mgv$:

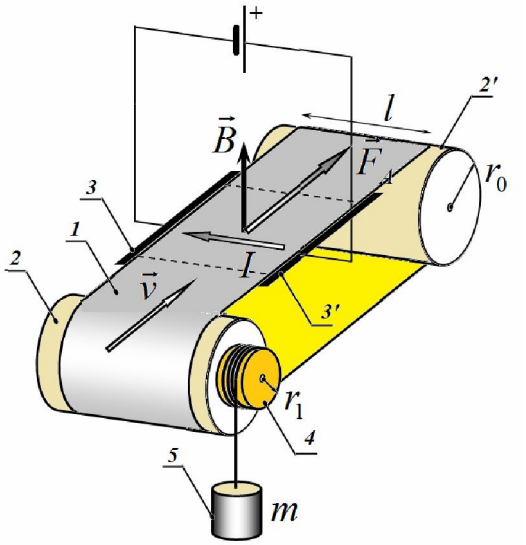
$$\eta=\frac{P}{P_0}=\frac{\left(\frac{mg}{Bl}\frac{r_1}{r_0}\right)^2 R}{mg\cdot\frac{mgR}{B^2l^2}\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2}=1=100\%. \tag{9}$$

Комментарий к решению Части 1.

Могут вызывать недоумение полученные зависимости: ЭДС, сила тока, мощность генератора возрастают при уменьшении индукции магнитного поля!? А что будет, если «убрать» магнитное поле $B=0$? Однако в решении рассматривается установившийся режим. В этом режиме при $B\to 0$ (в рамках сделанных предположений) скорости установившегося движения стремятся к бесконечности, иными словами рассматриваемый стационарный режим не возникает.

Часть 2. Электродвигатель.

Электродвигатель и электрогенератор «взаимно обратные» машины, поэтому расчет характеристик двигателя проведем без излишних (повторяющихся) комментариев.



2.1 В данном случае сила Ампера является «движущей» в механическом смысле. Используя правило левой руки не сложно определить необходимое направления тока через ленту и полярность подключения источника. Результат – показан на рисунке.

2.2 Теперь запишем уравнения, описывающие работу двигателя.

Сила Ампера, тянущая ленту:

$$F_A = IBl\,. \tag{10}$$

Сила тока в цепи

$$I = \frac{\varepsilon_\Sigma}{R} = \frac{\varepsilon_0 - v_0 Bl}{R}\,. \tag{11}$$

Условие равенства моментов сил на валу:

$$mgr_1 = F_A r_0\,. \tag{12}$$

Уравнение для определения скорости движения ленты (просто подстановки):

$$\frac{\varepsilon_0 - v_0 Bl}{R} Blr_0 = mgr_1\,. \tag{13}$$

Формула для установившейся скорости (решение уравнения (13)):

$$v_0 = \frac{\left(\varepsilon_0 - \dfrac{mgRr_1}{Blr_0}\right)}{Bl} \tag{14}$$

Скорость подъема груза:

$$\frac{v_0}{r_0} = \frac{v}{r_1} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{r_1}{r_0} v_0 = \frac{\left(\varepsilon_0 - \dfrac{mgRr_1}{Blr_0}\right)}{Bl} \frac{r_1}{r_0} \tag{15}$$

Таким образом, мы показали, что существует стационарный режим.

2.3 Рассчитаем требуемые характеристики двигателя.

2.3.1 Минимальное значение ЭДС источника $\varepsilon_{0\min}$, при которой груз начнет подниматься, находим из условия, что скорость подъема груза становится больше нуля:

$$\varepsilon_{0\min} = \frac{mgRr_1}{Blr_0}\,. \tag{16}$$

2.3.2 Сила тока I через источник определяем с помощью формул (11) и (14):

$$I = \frac{\varepsilon_\Sigma}{R} = \frac{\varepsilon_0 - v_0 Bl}{R} = \frac{\varepsilon_0 - \left(\varepsilon_0 - \frac{mgRr_1}{Blr_0}\right)}{R} = \frac{mgr_1}{Blr_0} \qquad (17)$$

Сравните с формулой (6)!

2.3.3 Скорость подъема груза определена ранее – формула (15).

2.3.4 Механическая мощность P, развиваемая двигателем:

$$P = mgv = mg\frac{\left(\varepsilon_0 - \frac{mgRr_1}{Blr_0}\right)}{Bl}\frac{r_1}{r_0} = \frac{mg}{Bl}\left(\varepsilon_0 - \frac{mgRr_1}{Blr_0}\right)\frac{r_1}{r_0}. \qquad (18)$$

2.3.5 КПД двигателя определяется как отношение механической мощности, развиваемой двигателем, к мощности источника тока $P_0 = \varepsilon I$:

$$\eta = \frac{mgv}{\varepsilon_0 I} = \frac{mg\frac{\left(\varepsilon_0 - \frac{mgRr_1}{Blr_0}\right)}{Bl}\frac{r_1}{r_0}}{\varepsilon_0\frac{mgr_1}{Blr_0}} = \frac{\varepsilon_0 - \frac{mgRr_1}{Blr_0}}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_{0\min}}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{\varepsilon_{0\min}}{\varepsilon_0}. \qquad (19)$$

КПД оказался меньше 1, так как имеются потери, связанные с выделением теплоты на источнике, обладающим внутренним сопротивлением R. При $R = 0$ КПД достигает единицы.